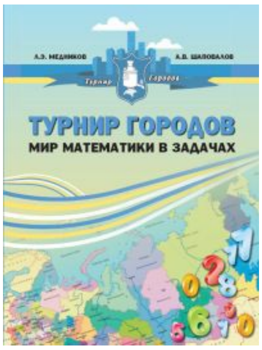


Турнир городов: мир математики в задачах

Л.Э.Медников А.В.Шаповалов

Предисловие

Среди математических соревнований Турнир городов, безусловно, явление уникальное. Он был организован более 30 лет назад Н.Н.Константиновым, который и по настоящее время является президентом Турнира. За эти бурные годы возникало и проводилось немало других соревнований. Однако Турнир как был, так и продолжает стоять особняком – и по правилам, и по задачам. Необычные правила открывают дорогу задачам, которые по соображениям спортивной предсказуемости невозможно дать ни на каком другом соревновании. На Турнире сложилась и поддерживается традиция отбора авторских задач с богатым математическим содержанием, как с короткими красивыми решениями, так и требующих исследования. Почти в каждой задаче есть хоть маленькое, но чудо: условие или решение содержит больше, чем можно ожидать на первый взгляд. Это может быть красивый ответ, сильный результат или выход на раздел математики, не заявленный в условии.

Мы считаем, что именно такие задачи позволяют показать заинтересованным школьникам математику живой, привлекательной и целостной. Желание выявить и продемонстрировать многообразие математических идей в задачах Турнира и побудило нас взяться за написание этой книги. Как водится, трудности были недооценены, и работа заняла раз в 10 больше времени, чем предполагалось изначально. За это время вышла книга А.К.Толпыго «1000 задач Турнира городов» (далее [Толп]). Она удовлетворила нетерпеливых читателей, предоставив им полный перечень задач первых 28 турниров, краткие решения, и живой рассказ автора об истории и правилах турнира от лица человека, стоявшего у истоков Турнира. Соответственно, нам она позволила сосредоточить усилия на других сторонах турнира.

Читатель держит в руках сборник задач Турнира городов за 10 лет, почти-что отчет. За эти годы прошли 80 туров, по восемь каждый год, в которых было свыше 400 различных задач. Но уже разнообразие и математическое содержание задач делает эту книгу чем-то гораздо большим. Читатель любит сборники задач с решениями, особенно если задачки яркие, трудные, а решения короткие и легкие. Приятно ведь подсунуть кому-нибудь красивую задачу, подождать пока он безуспешно провозится час или два, а если хватит терпения – то и несколько дней, а потом огорошить его решением из двух-трех фраз! Если так, то вы выбрали правильную книгу. В Турнире городов ярких задач пруд-пруди, а мы не щадили сил и времени на поиск коротких решений и «выжимание воды» из длинных.

Итак, жанр книги – это все таки не отчет. Чем больше мы смотрели на каждую из задач, тем больше обнаруживали связей с другими задачами и математикой в целом. Рубрикатор стал разрастаться до масштабов энциклопедии, и пришлось искать для книги новую форму. То, что получилось, сочетает в себе отчет, справочник по кружковой и олимпиадной математике и учебник в задачах. В каждой ипостаси мы пытались соединить лучшие черты книг-предшественников, в частности, сочетать краткость с полнотой. Например, старались, чтобы решения были столь же краткими, как в [Толп], но при этом были столь же полными и безошибочными, как в [ММО]; чтобы олимпиадные идеи и методы решений были представлены столь же полно, как в [Заоч], а математические идеи – так же широко, как в [МЗ], но с использованием почти исключительно задач турнира городов за указанные годы.

Традиционная часть книги состоит из вариантов Турнира городов за 10 лет с XIX по XXVIII (1997 – 2007 гг.). Варианты помещены примерно в том виде, в каком они выдавались школьникам (небольшие отличия связаны с исправлением опечаток, переносом всех расшифровок терминов в Словарик в конце книги, а также устранением разнобоя в терминологии; баллы за задачу или подпункт указаны в квдратных скобках). Выбор именно этих лет обусловлен тем, что начиная с XIX турнира ежегодные отчеты с решениями в России не выходили, а мы, наоборот, более активно подключились к составлению задач и вариантов, а также написанию решений для Турнира. В частности, при деятельном участии Л.Э.Медникова были выпущены в Израиле несколько ежегодных отчетов с решениями на русском и иврите, а А.В.Шаповалов выкладывал в сети условия и решения некоторых турниров по-шведски.

Все же рамки 10 турниров оказались чуть тесноваты для намеченных целей, . и мы сочли возможным пополнить книгу избранными задачами Турнира за другие годы, а также дополнительными задачами, в той или иной степени «родственными» основным.

Все задачи снабжены решениями, помещенными в отдельном разделе. Собственно решения авторы старались писать кратко, насколько это не вредило полноте. Некоторые задачи снабжены двумя (а иногда и тремя) решениями или идеей второго решения. Если второе решение выходило за рамки школьной программы, оно помечалось как решение *для знатоков*. Все остальное, что хотелось сказать по поводу задачи или решения, оформлялось как примечание, замечание или комментарий к решению. Помимо обычных, есть комментарии особого вида, озаглавленные Идеология и Ложный след.

Идеология – это соображения, как приведенное решение могло быть придумано. Чаще всего идеология приведена к задачам с вопросом «Можно ли?» и ответом «Можно». В решении предъявляется конструкция, а в идеологии – возможный способ поиска такой конструкции.

Ложный след – это распространенное (часто даже опубликованное) неполное или ошибочное решение, многими принимаемое за полное. Приводя мелким шрифтом текст псевдорешения, мы разъясняем затем, в чем состоит неполнота или ошибочность.

Ответы к задачам вынесены в отдельный раздел, их можно использовать как некоторую замену подсказкам.

К более-менее традиционным разделам относится и список авторов задач, с указанием перечня задач для каждого автора. Как уже сказано, варианты даны в «первозданном» виде, то есть при задаче ее автор не указан. И это не случайно: нормальному школьнику фамилия автора в момент олимпиады несущественна, а для изощренных профессионалов может послужить нежелательной подсказкой. А вот читатель, которому автор интересен, скорее будет благодарен за авторскую подборку задач.

Главной частью книги мы считаем Словарик. Он состоит из статей трех типов, объединяя в себе словарь олимпиадных терминов, рубрикатор задач по методам решения и темам, а также перечень математических фактов, известных завсегдатаям олимпиад, но не входящих обычно в школьную программу. Тексты статей обильно уснащены контекстными ссылками на другие статьи и на задачи; кроме того, список задач следует практически за каждой статьей. Мы очень надеемся, что книга будет изучаться не линейно; что каждый читатель, следуя по ссылкам в удобном ему порядке, будет прокладывать свою собственную тропу в математику.

Список статей достаточно нетрадиционен: он идет не от перечня из математической энциклопедии, а от вопросов, которые задавали любознательные или недоумевающие школьники на кружках и олимпиадах. Так, в эпоху обилия интернет-игр, карты и шахматы стали менее распространены, хотя в задачах широко используются. Поэтому мы вставили нужные названия и простейшие сведения об этих и некоторых других играх в словарик – разумеется, описав их сугубо с математической точки зрения.

Более половины статей словарика составляют наводящие идеи и темы. Их список существенно расширен по сравнению с аналогичными изданиями, многие рубрики придуманы нами. Такие статьи преследуют сразу несколько целей. Во-первых, соответствуюшие подборки задач могут послужить (и уже служили) хорошим подспорьем к созданию тематического кружкового занятия. Во-вторых, ссылка от задачи на такую статью заменяет подсказку, при том, что прочитав статью, школьник может научиться решать не только данную задачу, но и аналогичные. В-третьих, рубрика помогает найти задачу по ее содержанию, а не только по формулировке.

Наконец, некоторые статьи содержат факты и теоремы. Прежде всего, мы старались помещать то, что часто применяется на олимпиадах, но чье доказательство не так просто найти в популярных книгах. Некоторые же факты, как например выпрямление кратчайшего пути на развертке, существование выигрышной или ничейной стратегии, теорема Жордана, вообще объявили очевидными. Вместо доказательств от пытливых школьникам обычно отговариваются фразами вроде «Вот поступишь на мехмат, там тебе и докажут». Мы же даем их элементарные доказательства, считая их вполне доступными, не слишком длинными и обладающими большим обучающим эффектом.

Тем самым, амбициозному читателю созданы все условия чтобы научится решать задачи, подобные собранным в этой книге. Выберите задачу своего уровня (ориентируйтесь на класс и сложность) и попробуйте решить ее. Если получится – здорово, читайте ответ и решение, сравнивайте. Скорее всего, ваше решение будет не слишком похоже на наше. Если к решению приложен Ложный след, обязательно убедитесь, что ваше решение таковым не является!

А что делать, если выбранную задачу решить не получилось? Загляните в ответ – если он есть. Главное же – загляните в Ссылки к задаче. Почти к каждой задаче есть 3-4 ссылки на статьи словарика. Все статьи краткие, но там вы найдете полезные факты или описание приема решения задач и подборку задач, где этот прием применяется. Может найтись и конкретный намек к выбранной задаче. Если все еще задача не получается, порешайте задачи полегче из этих подборок, а потом вернитесь к выбранной.

В заключение об устройстве ссылок, которые составляют очень важный элемент данной книги. Жаль, что бумажный формат не предусматривает гиперссылок! Ссылки бывают трех типов.

Ссылка на литературу – это набор букв в квадратных скобках, например [ММО]. Расшифровка – в списке Литература в конце книги.

Ссылка на статью в словарике может даваться несколькими способами. В разделе «Наводящие идеи» после номера каждой задачи просто перечислены названия статей. Иногда ссылка дается в примечании. Но чаще всего мы прсио подчеркиваем одно или несколько слов в тексте. Подчеркнутые слова и составляют название статьи (возможно, лишь начало названия).

Наконец, ссылкой на задачу служит ее номер, состоящий из трех частей: номер турнира, номер тура, номер задачи. Например, 23.6.2 означает XXIII турнир, 6-й тур, задача 2. При ссылке внутри одного турнира номер турнира опускается. В Условиях задачи нумеруются двумя цифрами (в примере 6.2), а номер турнира есть в заголовке. Приведем список соответствия между номерами туров и их традиционными названиями в то время:

1 – осенний тренировочный младший,
2 – осенний тренировочный старший,
3 – осенний основной младший,
4 – осенний основной старший,
5 – весенний тренировочный младший,
6 – весенний тренировочный старший,
7 – весенний основной младший,
8 – весенний основной старший.

Благодарности

Президенту Турнира **Николаю Николаевичу Константинову** за советы, оказавшие значительное влияние на структуру книги;

Председателю Центрального жюри Турнира **Сергею Александровичу Дориченко**, поддерживавшему идею книги и оперативно снабжавшему авторов необходимыми материалами;

Директору МЦНМО **Ивану Валерьевичу Ященко,** без чьей моральной и материальной поддержки эта книга не была бы закончена;

Руководителю израильского жюри Турнира **Льву Радзиviловскому**, который не только поддерживает постоянный контакт с одним из авторов, но и создал сайт, на котором собраны решения всех задач Турнира городов на иврите;

Первому организатору Турнира в Израиле **Борису Бегуну** за подготовку к изданию в Израиле решений XVIII–XXII турниров, см. [ТГИзр1, ТГИзр2].

Всем неупомянутым здесь коллегам – за плодотворные обсуждения, а женам, детям и друзьям – за моральную поддержку.

Условия задач XXI и XXII Турниров городов

XXI Турнир городов
1999-2000 уч. год
Осенний тур
Младшие классы, тренировочный вариант

1.**1**. Бумажный прямоугольный треугольник площади 1 перегнули по прямой так, что вершина прямого угла совместилась с другой вершиной.
а) [2] В каком отношении делятся диагонали полученного четырехугольника их точкой пересечения?
б) [2] Полученный четырехугольник разрезали по диагонали, ведущей из третьей вершины исходного треугольника. Найдите площадь наименьшего образовавшегося куска бумаги.

1.**2**. Рассматриваются тройки целых чисел a, b и c, для которых выполнено условие: $a + b + c = 0$. Для каждой такой тройки вычисляется число
$$d = a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}.$$
а) [2] Может ли случиться, что $d = 2$?
б) [2] Может ли случиться, что d – простое число?

1.**3**[1]. [4] На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите все n, при которых это возможно.

1.**4**. [4] В Италии выпускают часы, в которых часовая стрелка делает в сутки один оборот, а минутная – 24 оборота, причем, как обычно, минутная стрелка длиннее часовой (в обычных часах часовая стрелка делает в сутки два оборота, а минутная – 24). Рассмотрим все положения двух стрелок и нулевого деления, которые встречаются и на итальянских часах, и на обычных. Сколько существует таких положений? (Нулевое деление отмечает 24 часа в итальянских часах и 12 часов в обычных часах).

1.**5**. [4] Имеются плашки (вырезанные из картона прямоугольники) размера 2×1. На каждой плашке нарисована одна диагональ. Есть плашки двух видов (так как диагональ можно расположить двумя способами), причем плашек каждого вида имеется достаточно много. Можно ли выбрать 18 плашек и сложить из них квадрат 6×6 так, чтобы концы диагоналей нигде не совпали?

---
[1] Ср. с задачей 2.3.

XXI Турнир городов
1999-2000 уч. год
Осенний тур
Старшие классы, тренировочный вариант

2.1. [4] В треугольнике точку пересечения биссектрис соединили с вершинами, в результате он разбился на три меньших треугольника. Один из меньших треугольников подобен исходному. Найдите его углы.

2.2. [4] Докажите, что существует бесконечно много нечетных чисел n, для которых число $2^n + n$ – составное.

2.3. [4] В пространстве проведено n плоскостей. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите все n, при которых это возможно.

.

2.4. [4] Можно ли отметить на числовой оси 50 отрезков (быть может, перекрывающихся), так что выполняются два условия:

а) длины отрезков – 1, 2, 3, ... , 50;

б) концы отрезков – это все целые точки от 1 до 100 включительно?

2.5. [4] Имеются плашки (вырезанные из картона прямоугольники) размера 2×1. На каждой плашке нарисована одна диагональ. Есть плашки двух видов (так как диагональ можно расположить двумя способами), причем плашек каждого вида имеется достаточно много. Можно ли выбрать 32 плашки и сложить из них квадрат 8×8 так, чтобы концы диагоналей нигде не совпали?

XXI Турнир городов
1999-2000 уч. год
Осенний тур
Младшие классы, основной вариант

3.**1**. [3] Несколько последовательных натуральных чисел выписали в строку в таком порядке, что сумма любых трех подряд стоящих чисел делится на самое левое число этой тройки. Какое максимальное количество чисел могло быть выписано, если последнее число строки – нечетное?

3.**2**. Пусть ABC – остроугольный треугольник, C' и A' – произвольные точки на сторонах AB и BC соответственно, B' – середина стороны AC.
а) [2] Докажите, что площадь треугольника $A'B'C'$ не больше половины площади треугольника ABC.
б) [2] Докажите, что площадь треугольника $A'B'C'$ равна четверти площади треугольника ABC тогда и только тогда, когда хотя бы одна из точек A', C' совпадает с серединой соответствующей стороны.

3.**3**. [5] 100 гирек массой 1, 2, …, 100 г разложили на две чаши весов так, что есть равновесие. Докажите, что можно убрать по две гирьки с каждой чаши так, что равновесие не нарушится.

3.**4**. **а**) [3] На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоит по фишке: внизу – белые, вверху – черные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все черные фишки стояли внизу, а белые – вверху?
б) [4] Тот же вопрос для доски 7×7.

3.**5**. [8] Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в последовательности было одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа. Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема – вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 100 раз.

3.**6**. [9] Внутри прямоугольного листа бумаги вырезали n прямоугольных дыр со сторонами, параллельными краям листа. На какое наименьшее число прямоугольных частей можно гарантированно разрезать этот дырявый лист? (Дыры не перекрываются и не соприкасаются.)

XXI Турнир городов
1999-2000 уч. год
Осенний тур
Старшие классы, основной вариант

4.1. [3] При каких $n > 2$ можно расставить целые числа от 1 до n по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел делилась нацело на следующее за ними по часовой стрелке?

4.2. На прямоугольном листе бумаги отмечены

а) [2] несколько точек на одной прямой;

б) [3] три точки.

Разрешается сложить лист бумаги несколько раз по прямой так, чтобы отмеченные точки не попали на линии сгиба, и затем один раз шилом проколоть сложенный лист насквозь. Докажите, что можно это сделать так, чтобы дырки оказались в точности в отмеченных точках и лишних дырок не получилось.

4.3. Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в последовательности было одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа. Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема – вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 100 раз.

4.4. Вневписанные окружности касаются сторон AC и BC треугольника ABC в точках K и L. Докажите, что прямая, соединяющая середины KL и AB,

а) [3] делит периметр треугольника ABC пополам;

б) [3] параллельна биссектрисе угла ACB.

4.5. **а**) [4] 100 гирек веса 1, 2, …, 100 г разложили на две чаши весов так, что есть равновесие. Докажите, что можно убрать по две гирьки с каждой чаши так, что равновесие не нарушится.
б) [4] Рассмотрим такие n, что набор гирь 1, 2, ..., n г можно разделить на две части, равные по весу. Верно ли, что для любого такого n, большего 3, можно убрать по две гирьки из каждой части так, что равенство весов сохранится?

4.6. [8] На большой шахматной доске отметили $2n$ клеток так, что ладья может ходить по всем отмеченным клеткам, не перепрыгивая через неотмеченные. Докажите, что фигуру из отмеченных клеток можно разделить на n прямоугольников.

4.7. [8] Докажите, что у выпуклого $10n$-гранника найдется n граней с одинаковым числом сторон.

XXI Турнир городов
1999-2000 уч. год
Весенний тур
Младшие классы, тренировочный вариант

5.**1**. [3] Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух соседних четных чисел?

5.**2**. [4] В трапеции $ABCD$ площади 1 основания BC и AD относятся как 1:2. Пусть K – середина диагонали AC. Прямая DK пересекает сторону AB в точке L. Найдите площадь четырехугольника $BCKL$.

5.**3**. В основании призмы лежит n-угольник. Требуется раскрасить все $2n$ ее вершин тремя красками так, чтобы каждая вершина была связана ребрами с вершинами всех трех цветов.

а) [2] Докажите, что если n делится на 3, то такая раскраска возможна.

б) [3] Докажите, что если такая раскраска возможна, то n делится на 3.

5.**4**. [5] Можно ли расставить в вершинах куба натуральные числа так, чтобы в каждой паре чисел, связанных ребром, одно из них делилось на другое, а во всех других парах такого не было?

XXI Турнир городов
1999-2000 уч. год
Весенний тур
Старшие классы, тренировочный вариант

6.**1**. [3] Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Оказалось, что сумма площадей двух противоположных (имеющих только общую вершину) треугольников равна сумме площадей двух других треугольников. Докажите, что одна из диагоналей делится другой диагональю пополам.

6.**2**. [4] На двух противоположных гранях игрального кубика нарисовано по одной точке, на двух других противоположных – по две точки, и на двух оставшихся – по три точки. Из восьми таких кубиков сложили куб 2×2×2 и посчитали суммарное число точек на каждой из его шести граней. Могли ли получиться шесть последовательных чисел?

6.**3**. [4] Докажите неравенство $1^k + 2^k + \ldots + n^k \le \dfrac{n^{2k} - (n-1)^k}{n^k - (n-1)^k}$ при любых натуральных n и k.

6.**4**. Существует ли такая бесконечная последовательность, состоящая из

а) [3] действительных;

б) [3] целых

чисел, что сумма любых десяти подряд идущих чисел положительна, а сумма первых подряд идущих $10n$+1 чисел отрицательна при любом натуральном n?

XXI Турнир городов
1999-2000 уч. год
Весенний тур
Младшие классы, основной вариант

7.1. [3] Найдите все действительные корни уравнения

$$(x + 1)^{21} + (x + 1)^{20}(x - 1) + (x + 1)^{19}(x - 1)^2 + \ldots + (x - 1)^{21} = 0.$$

7.2. [3] Длины оснований трапеции – целые числа. Докажите, что ее можно разбить на равные треугольники.

7.3. [6] Дана окружность и точка A внутри нее. Найдите геометрическое место вершин C всевозможных прямоугольников $ABCD$, где B и D – точки окружности.

7.4. [7] Разбойники Хапок и Глазок делят кучу из 100 монет. Хапок захватывает из кучи пригоршню монет, а Глазок, глядя на пригоршню, решает, кому из двоих она достается. Так продолжается, пока кто-то из них не получит девять пригоршней, после чего другой забирает все оставшиеся монеты (дележ может закончиться и тем, что монеты будут разделены прежде, чем кто-то получит девять пригоршней). Хапок может захватить в пригоршню сколько угодно монет. Какое наибольшее число монет он может гарантировать себе независимо от действий Глазка?

7.5. [7] Какое наибольшее число шахматных коней можно расставить на доске 5×5 так, чтобы каждый из них бил ровно двух других?

7.6. [10] В однокруговом шахматном турнире назовем партию *неправильной*, если выигравший ее шахматист по итогам турнира набрал очков меньше, чем проигравший. Докажите, что неправильные партии составляют меньше $^3/_4$ общего числа партий в турнире.

XXI Турнир городов
1999-2000 уч. год
Весенний тур
Старшие классы, основной вариант

8.1. [3] Натуральные числа m и n взаимно просты. Дробь $\frac{m+2000n}{n+2000m}$ можно сократить на число d. Каково наибольшее возможное значение d ?

8.2. [5] Хорды AC и BD окружности с центром O пересекаются в точке K. M и N – центры окружностей, описанных около треугольников AKB и CKD. Докажите, что
$OM = KN$.

8.3. [5] В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх независимо от того, как Петя выбирает пачки.

8.4. [5] На плоскости, разграфленной сеткой вертикальных и горизонтальных прямых на квадратные клетки, нарисован выпуклый многоугольник M так, что все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не вертикальна и не горизонтальна. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков сетки внутри M равна сумме длин горизонтальных отрезков сетки внутри M.

8.5. [7] Найдите максимальное число N, для которого существуют такие N последовательных чисел, что сумма цифр первого числа делится на 1, сумма цифр второго числа – на 2, сумма цифр третьего числа – на 3, …, сумма цифр N-го числа – на N.

8.6. В однокруговом шахматном турнире назовем партию *неправильной*, если выигравший ее шахматист по итогам турнира набрал очков меньше, чем проигравший.

а) [6] Докажите, что неправильные партии составляют меньше $^3/_4$ общего числа партий в турнире.

б) [6] Докажите, что в пункте **а**) число $^3/_4$ нельзя заменить на меньшее.

XXII Турнир городов
2000-01 уч. год
Осенний тур
Младшие классы, тренировочный вариант

1.**1**. [3] В клетках таблицы 4×4 записаны числа так, что сумма соседей у каждого числа равна 1 (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). Найдите сумму всех чисел таблицы.

1.**2**. [3] $ABCD$ – параллелограмм, M – середина стороны CD, H – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую AM. Докажите, что треугольник BCH равнобедренный.

1.**3**. **а**) [2] На доске выписано 100 различных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать восемь чисел так, что их среднее арифметическое не будет равно среднему арифметическому никаких девяти из выписанных чисел.
б) [2] На доске выписано 100 *целых* чисел. Известно, что для любых восьми из этих чисел найдутся такие девять из этих чисел, что среднее арифметическое этих восьми чисел равно среднему арифметическому этих девяти чисел. Докажите, что все числа равны.

1.**4**. [5] Даны 32 одинаковые по виду монеты. Известно, что среди них есть ровно две фальшивые, которые отличаются от остальных по весу (настоящие монеты равны по весу друг другу, и фальшивые монеты также равны по весу друг другу). Как разделить все монеты на две равные по весу кучки, сделав не более четырех взвешиваний на чашечных весах без гирь?

XXII Турнир городов
2000-01 уч. год
Осенний тур
Старшие классы, тренировочный вариант

2.1. [3] Треугольник ABC вписан в окружность. Через точку A проведены хорды, пересекающие сторону BC в точках K и L и дугу BC в точках M и N. Докажите, что если вокруг четырехугольника $KLNM$ можно описать окружность, то треугольник ABC – равнобедренный.

2.2. [3] Натуральные числа a, b, c, d таковы, что $ad - bc > 1$. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c, d не делится на $ad - bc$.

2.3. [4] В каждой боковой грани пятиугольной призмы есть угол φ (среди углов этой грани). Найдите все возможные значения φ.

2.4. **а**) [3] Даны 32 одинаковые по виду монеты. Известно, что среди них есть ровно две фальшивые, которые отличаются от остальных по весу (настоящие монеты равны по весу друг другу, и фальшивые монеты также равны по весу друг другу). Как разделить все монеты на две равные по весу кучки, сделав не более четырех взвешиваний на чашечных весах без гирь?
б) [2] Та же задача для 22 монет.

XXII Турнир городов
2000-01 уч. год
Осенний тур
Младшие классы, основной вариант

3.1. [3] Дана таблица $n \times n$, в каждой ее клетке записано число, причем все числа различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа.

3.2. [3] Между двумя параллельными прямыми расположили окружность радиуса 1, касающуюся обеих прямых, и равнобедренный треугольник, основание которого лежит на одной из прямых, а вершина – на другой. Известно, что треугольник и окружность имеют ровно одну общую точку, и что эта точка лежит на вписанной окружности треугольника. Найдите радиус вписанной окружности треугольника.

3.3. [4] Натуральные числа a, b, c, d таковы, что наименьшее общее кратное этих чисел равно $a + b + c + d$. Докажите, что $abcd$ делится на 3 или на 5 (или на то и на другое).

3.4. [4] Рассматривается доска 8×8, клетки которой пока не окрашены. Сколькими способами можно раскрасить доску в черный и белый цвета так, чтобы черных клеток было 31 и никакие две черные клетки не имели общей стороны?
(Два способа раскраски считаются различными, если найдется клетка, которая при одном из этих способов раскраски белая, а при другом – черная).

3.5. [6] На правой чаше чашечных весов лежит груз массой 11111 г. Весовщик последовательно раскладывает по чашам гири, первая из которых имеет массу 1 г, а каждая последующая вдвое тяжелее предыдущей. В какой-то момент весы оказались в равновесии. На какой чаше лежит 16-граммовая гиря?

3.6. [7] В весеннем туре Турнира городов 2000 г. старшеклассникам страны N было предложено шесть задач. Каждую задачу решили ровно 1000 школьников, но никакие два школьника не решили вместе все шесть задач. Каково наименьшее возможное число старшеклассников страны N, принявших участие в Турнире?

3.7. [8] У первоклассника имеется сто карточек, на которых написаны числа от 1 до 100, а также большой запас знаков "+" и "=". Какое наибольшее число верных равенств он может составить? (Каждая карточка используется не более одного раза, в каждом равенстве может быть только один знак "=", переворачивать карточки и прикладывать их для получения новых чисел нельзя.)

XXII Турнир городов
2000-01 уч. год
Осенний тур
Старшие классы, основной вариант

4.1. [3] Натуральные числа a, b, c, d таковы, что наименьшее общее кратное этих чисел равно $a + b + c + d$. Докажите, что $abcd$ делится на 3 или на 5 (или на то и на другое).

4.2. [4] Для какого наибольшего n можно выбрать на поверхности куба n точек так, чтобы не все они лежали на одной грани куба и при этом были вершинами правильного (плоского) n-угольника?

4.3. [4] Длины сторон треугольника ABC равны a, b и c ($AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и $a < b < c$). На лучах BC и AC отмечены соответственно такие точки B_1 и A_1, что $BB_1 = AA_1 = c$. На лучах CA и BA отмечены соответственно такие точки C_2 и B_2, что $CC_2 = BB_2 = a$. Найти отношение $A_1B_1 : C_2B_2$.

4.4. Пусть целые ненулевые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что равенство

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}}} = x$$

выполнено при всех целых значениях x, входящих в область определения дроби, стоящей в левой части.

а) [3] Докажите, что число n четно.

б) [4] При каком наименьшем n такие числа существуют?

4.5. [6] Клетки доски $m\times n$ покрашены в два цвета. Известно, что на какую бы клетку ни поставить ладью, она будет бить больше клеток *не* того цвета, на котором стоит (клетка, на которой стоит ладья, тоже считается побитой). Докажите, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали клеток обоих цветов поровну.

4.6. **а**) [5] Несколько черных квадратов со стороной 1 см прибиты к белой плоскости одним гвоздем толщиной 0,1 см (гвоздь не задевает границ квадратов.) Образовалась многоугольная черная фигура. Может ли периметр этой фигуры быть больше 1 км?

б) [5] Та же задача, но гвоздь имеет толщину 0 (то есть “пробивает” квадрат в точке).

в) [5] Несколько черных квадратов со стороной 1 лежат на белой плоскости, образуя черную фигуру (возможно, состоящую из нескольких кусков и имеющую дырки). Может ли отношение периметра этой фигуры к ее площади быть больше 10000 ?

XXII Турнир городов
2000-01 уч. год
Весенний тур
Младшие классы, тренировочный вариант

5.**1**. [3] Натуральное число n разрешается заменить на число ab, если $a + b = n$ и числа a и b натуральные. Можно ли с помощью таких замен получить из числа 22 число 2001?

5.**2**. [4] В треугольнике одна из средних линий больше одной из медиан. Докажите, что этот треугольник тупоугольный.

5.**3**. [4] В магазин завезли 20 кг сыра, за ним выстроилась очередь. Отпустив сыр очередному покупателю, продавщица безошибочно подсчитывает средний вес покупки по всему проданному сыру и сообщает, на сколько человек хватит оставшегося сыра, если все будут покупать именно по этому среднему весу. Могла ли продавщица после каждого из первых 10 покупателей сообщать, что сыра хватит еще ровно на 10 человек? Если да, то сколько сыра осталось в магазине после первых 10 покупателей?

5.**4**. **а**) [2] На столе лежат пять одинаковых бумажных треугольников. Каждый из них разрешается сдвигать в любом направлении, *не поворачивая*. Верно ли, что всегда любой из этих треугольников можно накрыть четырьмя другими?
б) [3] На столе лежат пять одинаковых *равносторонних* бумажных треугольников. Каждый из них разрешается сдвигать в любом направлении, не поворачивая. Докажите, что любой из этих треугольников можно накрыть четырьмя другими.

5.**5**. [5] На доске размером 15×15 клеток расставили 15 ладей, не бьющих друг друга. Затем каждую ладью передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи будут бить друг друга.

XXII Турнир городов
2000-01 уч. год
Весенний тур
Старшие классы, тренировочный вариант

6.1. [3] Автобус, едущий по маршруту длиной 100 км, снабжен компьютером, показывающим, сколько времени осталось до прибытия в конечный пункт. Это время рассчитывается исходя из предположения, что средняя скорость автобуса на оставшемся участке маршрута будет такой же, как и на уже пройденной его части. Спустя 40 минут после начала движения ожидаемое время до прибытия составило 1 час и оставалось таким еще в течение пяти часов. Могло ли такое быть? Если да, то сколько километров проехал автобус к окончанию этих пяти часов?

6.2. [4] Десятичная запись натурального числа a состоит из n цифр, а десятичная запись числа a^3 состоит из m цифр. Может ли $n + m$ равняться 2001?

6.3. [4] В треугольнике ABC точка X лежит на стороне AB, а точка Y – на стороне BC. Отрезки AY и CX пересекаются в точке Z. Известно, что $AY = CY$ и $AB = CZ$. Докажите, что точки B, X, Z и Y лежат на одной окружности.

6.4. [5] Двое играют на доске 3×100 клеток: кладут по очереди на свободные клетки доминошки 1×2. Первый игрок кладет доминошки, направленные вдоль доски, второй – в поперечном направлении. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из играющих может обеспечить себе победу (как бы ни играл его противник), и как ему следует играть?

6.5. [5] На поверхности правильного тетраэдра с ребром 1 см отмечены 9 точек. Докажите, что среди этих точек найдутся две, расстояние между которыми (в простран-стве) не превосходит 0,5 см.

XXII Турнир городов
2000-01 уч. год
Весенний тур
Младшие классы, основной вариант

7.1. [3] В некоторой стране есть 10% работников, чья зарплата составляет 90% всей зарплаты, выплачиваемой в этой стране. Страна разделена на несколько регионов. Может ли в каждом из них зарплата любых 10% работников составлять не более 11% от всей зарплаты, выплачиваемой в этом регионе?

7.2. [5] Есть три кучки камней: в первой 51 камень, во второй – 49, а в третьей – 5. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку, состоящую из четного количества камней, на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?

7.3. [5] Внутри угла с вершиной M отмечена точка A. Из этой точки выпустили шар, который отразился от одной стороны угла в точке B, затем от другой стороны в точке C и вернулся в A (“угол падения” равен “углу отражения”). Докажите, что центр O окруж-ности, описанной около треугольника BCM, лежит на прямой AM. (Шар считайте точкой.)

7.4. [5] На доске нарисовали выпуклый многоугольник. В нем провели несколько диагоналей, не пересекающихся внутри него, так что он оказался разбит на треугольники. Затем возле каждой вершины записали число треугольников, примыкающих к этой вершине, после чего все диагонали стерли. Можно ли по оставшимся возле вершин числам восстановить стертые диагонали?

7.5. **а**) [3] На две клетки шахматной доски выставляются черная и белая фишки. Разрешается по очереди передвигать их, каждым ходом сдвигая очередную фишку на любое свободное соседнее поле по вертикали или горизонтали. Может ли случиться, что после нескольких ходов все возможные расположения этих двух фишек на доске встретятся ровно по одному разу?
б) [4] А если разрешается двигать фишки в любом порядке (не обязательно по очереди)?

7.6. [7] Высоты треугольника ABC – AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах (точках пересечения высот) треугольников AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

7.7. Леша задумал двузначное число (от 10 до 99). Гриша пытается его отгадать, называя двузначные числа. Если Гриша правильно называет число, или же одну цифру называет правильно, а в другой ошибается не более чем на единицу, то Леша отвечает “тепло”; в остальных случаях Леша отвечает “холодно”. (Например, если задумано число 65, то назвав 65, 64, 66, 55 или 75, Гриша услышит в ответ “тепло”, а в остальных случаях услышит “холодно”).
а) [2] Покажите, что нет способа, при котором Гриша гарантировано узнает число, истратив 18 попыток.
б) [3] Придумайте способ, при котором Гриша гарантировано узнает число, истратив 24 попытки (какое бы число не задумал Леша).
в) [3] А за 22 попытки получится?

XXII Турнир городов

2000-01 уч. год

Весенний тур

Старшие классы, основной вариант

8.1. [3] Приведите пример такого многочлена $P(x)$ степени 2001, что при всех x выполнено равенство $P(x) + P(1 - x) = 1$.

8.2. [5] В школе (где училось не менее 6 учеников) подвели итоги учебного года. Выяснилось, что в любом множестве из 5 и более учеников не менее 80% двоек, полученных этими учениками в течение года, поставлены не более чем 20% учеников из из этого множества. Докажите, что по крайней мере три четверти всех двоек, поставленных в школе, получил один ученик.

8.3. [5] Высоты треугольника ABC – AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что треугольник с вершинами в ортоцентрах (точках пересечения высот) треугольников AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1 равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

8.4. [5] Даны две таблицы A и B, в каждой m строк и n столбцов. В каждой клетке каждой таблицы записано одно из чисел 0 или 1, причем в строках таблиц числа не убывают (при движении по строке слева направо), и в столбцах таблиц числа не убывают (при движении по столбцу сверху вниз). Известно, что при любом k от 1 до m сумма чисел в верхних k строках таблицы A не меньше суммы чисел в верхних k строках таблицы B. Известно также, что всего в таблице A столько же единиц, сколько в таблице B. Докажите, что при любом l от 1 до n сумма чисел в левых l столбцах таблицы A не больше суммы чисел в левых l столбцах таблицы B.

8.5. Может ли в итоговой таблице однокругового шахматного турнира для каждого участника сумма очков тех, у кого он выиграл, быть

а) [4] *больше*;

б) [4] *меньше*

суммы очков тех, кому он проиграл?

8.6. [8] Докажите, что найдутся такие 2001 выпуклых многогранников в пространстве, что никакие три из них не имеют общих точек, а любые два касаются друг друга (то есть имеют хотя бы одну общую граничную точку, но не имеют общих внутренних точек).

8.7. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). Ход состоит в том, что из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки.

а) [4] Пусть на каждом следующем ходу разрешается брать шарики из той коробочки, в которую был положен последний шарик. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

б) [4] Пусть теперь на каждом ходу разрешается брать шарики из любой коробочки. Верно ли, что за несколько ходов из любого начального расположения шариков по коробочкам можно получить любое другое?

Ответы

XXI Турнир городов

1.1. **а**) 2:1. **б**) $^1/_6$.
1.2. Не может.
1.3. $n_1 = 2000$, $n_2 = 3998$.
1.4. 12 положений.
1.5. Можно.
2.1. $^{\pi}/_7$, $^{2\pi}/_7$, $^{4\pi}/_7$.
2.3. $n_1 = 2000$, $n_2 = 3998$.
2.4. Нельзя.
2.5. Можно.
3.1. 5 чисел.
3.4. **а**) За 120 ходов. **б**) За 92 хода.
3.6. На $3n + 1$ частей.
4.1. Только при $n = 3$.
4.5. **б**) Неверно.
5.1. Не может.
5.2. $^2/_9$.
5.4. Можно.
6.2. Не могли.
6.4. **а**) Существует. **б**) Не существует.
7.1. $x = 0$.
7.3. Окружность с центром O и радиусом $\sqrt{2r^2 - OA^2}$ (r – радиус, а O – центр данной окружности).
7.4. 46 монет.
7.5. 16 коней.
8.1. 3999999.
8.5. 21.

XXII Турнир городов

1.1. 6.
2.3. 90°.
3.2. $^1/_2$.
3.4. 68 способами.
3.5. На левой.
3.6. 2000.
3.7. 33 равенства.
4.2. Для $n = 12$.
4.3. $c{:}a$.
4.4. **б**) При $n = 4$.
4.6. Не может (на все три вопроса).
5.1. Можно.
5.3. Могла; 10 кг.
5.4. **а**) Неверно.
6.1. Могло; 85 км.
6.2. Не может.
6.4. Первый игрок.
7.1. Может.
7.2. Нельзя.
7.4. Можно.
7.5. Не может (на оба вопроса).
7.7. **в**) Получится.
8.5. Не может (на оба вопроса).
8.7. **б**) Верно.

Наводящие идеи

XXI Турнир городов

1.**1**. **а**) Подмена объекта. Простая геометрия. **б**) Площадь.
1.**2**. Четность. Делимость. Многочлены. Диофантовы уравнения. Редукция. Перебор.
1.**3**. Двумя способами. Делимость. Разбиение.
1.**4**. Задачи на движение. Соответствие.
1.**5**. Конструкции. Симметрия. Клетчатые задачи.
2.**1**. Подобие.
2.2. Разложение на множители. Делимость. Бесконечность. Степени двойки.
2.**3**. Двумя способами. Делимость. Разбиение.
2.**4**. Четность.
2.**5**. Конструкции. Симметрия. Клетчатые задачи.
3.1. Четность. Оценка.
3.**2**. Функции. Площадь.
3.**3**. Чередование. Диофантовы уравнения.
3.4. Узкие места. Четность. Чередование. Разбиение. Алгоритм. Оценка. Графы. Клетчатые задачи.
3.**5**. Узкие места. Последовательности. Бесконечность.
3.6. Алгоритм. Геометрическая комбинаторика. Двумя способами.
4.**1**. Четность. Узкие места.
4.2. Алгоритм. Причесывание. Геометрическая комбинаторика.
4.3. Узкие места. Последовательности. Бесконечность.
4.**4**. Вневписанные окружности. Векторы.
4.5. Чередование. Диофантовы уравнения. Конструкции. Перебор.
4.**6**. Узкие места. Алгоритм. Связность. Клетчатые задачи.
4.**7**. Свойства средних. Геометрическая комбинаторика. Неравенства в геометрии. Оценка.
5.**1**. Целочисленные неравенства. Диофантовы уравнения.
5.**2**. Площадь.
5.**3**. Соответствие. Делимость. Конструкции. Графы.
5.**4**. Конструкции. Делимость. Чередование. Графы.
6.1. Площадь.
6.**2**. Четность. Двумя способами.
6.**3**. Уравнения и неравенства. Разбиение. Индукция.
6.**4**. Целочисленные неравенства. Последовательности. Бесконечность. Конструкции. Спецификация.
7.**1**. Уравнения. Многочлены.
7.**2**. Подмена объекта. Теорема Фалеса.
7.**3**. Формулы в геометрии. Окружности.
7.**4**. Оценка. Игры.
7.**5**. Чередование. Оценка. Раскраска. Клетчатые задачи.
7.**6**. Разбиение.
8.**1**. Целочисленные неравенства. Делимость.
8.**2**. Векторы. Геометрические преобразования и проекция.
8.**3**. Индукция. Кодировка. Процессы: полуинвариант. Принцип крайнего.
8.**4**. Подмена объекта. Двумя способами. Площадь. Клетчатые задачи.
8.**5**. Четность. Оценка.

8.6. Разбиение. Оценка. Площадь.

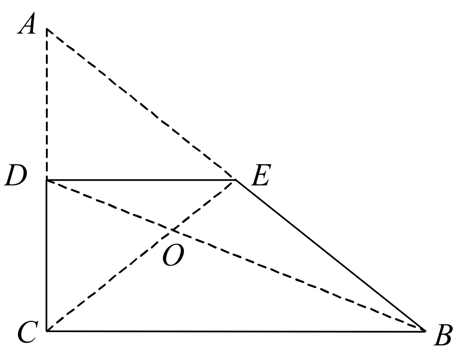
XXII Турнир городов

1.1. Разбиение. Клетчатые задачи.
1.2. Простая геометрия.
1.3. Свойства средних. Принцип крайнего. Делимость.
1.4. Испытания. Соответствие: кодировка. Редукция. Степени двойки.
2.1. Окружности.
2.2. Делимость. Причесывание.
2.3. Оценка. Узкие места.
2.4. Испытания. Соответствие: кодировка. Редукция. Степени двойки.
3.1. Подмена объекта. Принцип крайнего. Редукция. Клетчатые задачи.
3.2. Подобие. Геометрические преобразования: гомотетия. Окружности. Биссектрисы.
3.3. Делимость. Целочисленные неравенства. Принцип крайнего. Перебор.
3.4. Связность. Разбиение. Арифметическая комбинаторика. Клетчатые задачи.
3.5. Делимость и остатки. Степени двойки.
3.6. Оценка. Конструкции. Симметрия.
3.7. Оценка.
4.1. Делимость. Целочисленные неравенства. Принцип крайнего. Перебор.
4.2. Оценка.
4.3. Векторы. Подобие.
4.4. Функции.
4.5. Целочисленные неравенства. Причесывание. Клетчатые задачи.
4.6. Площадь. Разбиение. Геометрическая комбинаторика.
5.1. Причесывание. Обратный ход. Алгоритм.
5.2. Неравенства в геометрии.
5.3. Функции. Двумя способами.
5.4. Узкие места. Подмена объекта. Геометрическая комбинаторика.
5.5. Четность. Клетчатые задачи.
6.1. Функции. Двумя способами. Задачи на движение.
6.2. Делимость и остатки. Функции.
6.3. Окружности. Формулы в геометрии.
6.4. Игры. Клетчатые задачи.
6.5. Оценка. Геометрическая комбинаторика.
7.1. Свойства средних. Конструкции.
7.2. Делимость. Процессы: инвариант. Перебор.
7.3. Окружности. Биссектрисы.
7.4. Редукция. Принцип крайнего. Оценка.
7.5. Четность. Чередование. Графы. Клетчатые задачи.
7.6. Простая геометрия.
7.7. Соответствие. Испытания. Клетчатые задачи.
8.1. Симметрия. Многочлены. Постепенное конструирование.
8.2. Спецификация. Индукция. Уравнения и неравенства.
8.3. Простая геометрия.
8.4. Принцип крайнего. Подмена объекта. Соответствие. Уравнения и неравенства. Клетчатые задачи.
8.5. Инвариант. Двумя способами.
8.6. Постепенное конструирование. Геометрическая комбинаторика. Ослабление условий.
8.7. Процессы. Графы. Связность.

Решения задач

XXI Турнир городов

1.**1**. **а**) Треугольник ABC очевидно перегнули по средней линии DE (см. рис.). Поэтому «диагонали» CE и BD являются его *медианами*. Значит, BO:OD = CO:OE = 2:1.



б) После разреза образуется три куска. Два из них – треугольники DOC и BCD, третий составлен из треугольников DOE и BDE (после разворачивания он тоже превратится в треугольник). Наименьшая площадь у треугольника OCD (он является частью треугольника BCD, а также частью треугольника CDE, равновеликого треугольнику BDE). Поскольку $OD = {}^1/_3\,BD$, то $S_{OCD} = {}^1/_3\,S_{BCD} = {}^1/_6\,S_{BCA}$.

1.**2**. **Решение 1**. Заметим, что $a^{1999} - a = a(a^{1998} - 1)$ делится на $a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1)$, а произведение трех последовательных чисел делится на 6. Поэтому и $d = a^{1999} + b^{1999} + c^{1999} - (a + b + c) = (a^{1999} - a) + (b^{1999} - b) + (c^{1999} - c)$ тоже делится на 6.

Решение 2. **б**) Четности сумм $a + b + c$ и $a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}$ одинаковы: они составлены из слагаемых одинаковой четности. Поэтому d четно. Четное простое – это 2. Таким образом, пункт б) сводится к пункту а).

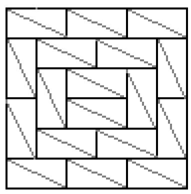
а) Пусть a, b и c четны. Тогда d делится на 2^{1999} и, значит, не равно 2.

Пусть два числа (например, a и b) нечетны, а третье четно. Заметим, что d делится на a (так как $b^{1999} + c^{1999}$ делится на $b + c = -a$). Значит, $|a| = 1$. Аналогично $|b| = 1$. Но d не равно 2 ни в случае $a = b = \pm 1$, $c = \mp 2$, ни в случае $a = -b = \pm 1$, $c = 0$.

1.**3**. Разобьем все проведенные прямые на группы параллельных между собой. Пусть таких групп k. Ясно, что в каждой группе $n - 1999$ прямых. Поэтому $n = k(n - 1999)$, то есть $1999k = n(k - 1)$. Так как числа k и $k - 1$ взаимно просты, то 1999 (а это число простое) делится на $k - 1$. Значит, $k - 1 = 1999$ или $k - 1 = 1$. Соответственно $n_1 = 2000$, $n_2 = 3998$.

1.**4**. Пусть некоторое положение стрелки обычных часов до полудня принимают в момент времени t (считая от начала суток; $0 \le t < 12$: мы измеряем время в часах). Так как *часовая* стрелка итальянских часов движется в два раза медленнее *часовой* стрелки обычных, то она совместится с рассматриваемым положением часовой стрелки обычных в момент $2t$. Минутные же стрелки (обычных и итальянских часов) занимают одно и то же положение, если *разница времен* составляет *целое число часов*. Таким образом, условие “совпадения положений” состоит в том, что число $2t - t = t$ целое. В указанном интервале лежат ровно 12 целых значений – от 0 до 11 (что соответствует моментам 0, 1, ..., 11 часов *ровно* на обычных часах).

1.**5**. См. рисунок:



2.**1**. Углы “меньшего” треугольника, подобного исходному, равны углам исходного треугольника. В то же время два из трех его углов равны *половинам* углов исходного треугольника. Поэтому углы исходного треугольника относятся, как 1:2:4. Учитывая, что сумма этих углов равна π, получаем ответ.

2.**2**. **Решение 1**. Выберем n таким, чтобы оба слагаемых были точными кубами: $n = (3m)^3$, где m – произвольное нечетное число. Тогда $2^n = \left(2^{9m^3}\right)^3$, и поэтому

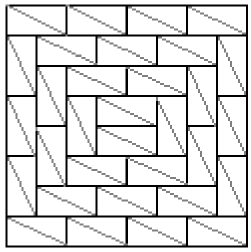
$2^n + n = (2^{9m^3} + 3m)(2^{18m^3} - 3m\cdot 2^{9m^3} + 9m^2)$. Оба множителя, очевидно, больше 1.

Решение 2. Положим $n = 6m + 1$. Тогда $2^n + n = 2^{6m+1} + 6m + 1 = (2^{6m+1} + 1) + 6m$. Оба слагаемых делятся на 3 (почему?).

2.**3**. Разобьем все проведенные плоскости на группы параллельных между собой. Пусть таких групп k. Ясно, что в каждой группе $n - 1999$ плоскостей. Поэтому $n = k(n - 1999)$. Отсюда $1999k = n(k - 1)$. Так как числа k и $k - 1$ взаимно просты, то 1999 делится на $k - 1$. Значит, $k - 1 = 1999$ или $k - 1 = 1$. Соответственно $n_1 = 2000$, $n_2 = 3998$.

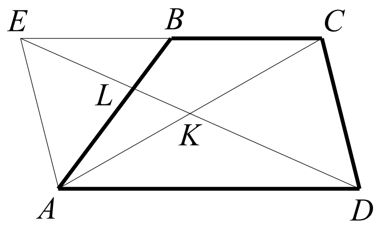
2.**4**. Предположим, что нам удалось это сделать. У 25 отрезков четной длины концы находятся в точках с координатами одной четности, у 25 отрезков нечетной длины – в точках с координатами разной четности. Значит, количество “нечетных” концов нечетно, что противоречит условию (среди чисел от 1 до 100 нечетных – 50). Противоречие.

2.**5**. См. рисунок:



5.**1**. **Решение 1**. Пусть последовательные числа – это n и $n + 1$, а соседние четные числа – это m и $m + 2$ ($m > 0$). Если $m \geq n$, то $m(m + 2) > n(n + 1)$. Если же $m < n$, то $m + 2 \leq n + 1$ и $m(m + 2) < n(n + 1)$.
Решение 2. Пусть $m(m + 2) = n(n + 1)$. Тогда $(m + 1)^2 = m(m + 2) + 1 = n(n + 1)+ 1 = n^2 + n + 1$. Но $n^2 < n^2 + n + 1 < (n + 1)^2$, то есть
$n^2 < (m + 1)^2 < (n + 1)^2$, откуда $n < m + 1 < n + 1$, что невозможно.
Замечание. Эта задача – частный случай задачи 25.3.3.

5.**2**. Рассмотрим параллелограмм $ADCE$. Тогда K – точка пересечения его диагоналей.
$EC = AD = 2BC$, то есть B – середина отрезка EC. AB и EK – медианы треугольника ACE. По известному свойству медиан $LK = {}^1/_3\,EK$.
$S_{DAC} = 2\,S_{BAC}$ (у этих треугольников высоты равны, а основание первого вдвое больше основания второго). Значит, $S_{BAC} = {}^1/_3 S_{ABCD} = {}^1/_3$, а $S_{EAC} = S_{DAC} = {}^2/_3$. Далее, $S_{LAK} = {}^1/_3 S_{EAK} = {}^1/_6 S_{EAC} = {}^1/_9$, $S_{BCKL} = S_{BAC} - S_{LAK} = {}^2/_9$.



5.**3**. **а**) Раскрасим вершины одного основания в таком порядке: красная, синяя, зеленая; красная, синяя, зеленая и т. д. Соответствующие вершины второго основания раскрасим в те же цвета.
б) Пусть есть r ребер, у которых один конец синий, другой – красный. Из каждой красной вершины выходит ровно одно такое ребро, поэтому красных вершин ровно r. Точно также синих – ровно r, то есть синих и красных вершин поровну. Аналогично, количество красных вершин равно количеству зеленых, то есть трети количества вершин призмы (а их $2n$). Поэтому $2n$ (а значит, и n) делится на 3.

5.**4**. Отметим четыре вершины куба, никакие две из которых не соединены ребром, и поместим в них четыре различных простых числа (например, 2, 3, 5, 7). В каждую из остальных вершин поместим произведение чисел, стоящих в отмеченных вершинах, соединенных с ней ребрами (их ровно три). Легко видеть, что все требования выполнены.
Идеология. Как догадаться до конструкции? Направим на каждом ребре стрелку от делимого к делителю. Не должно возникнуть маршрутов из пар стрелок в одном направлении – иначе число в начале маршрута разделится на число в его конце, а они не соседи. Значит, мы обязаны расставить стрелки так, чтобы на каждом маршруте направления *чередовались*. Такая расстановка стрелок есть на любом двудольном графе (куб – его частный случай): раскрасим вершины в черный и белый цвета и направим все стрелки в черные вершины. Теперь и вся конструкция легко обобщается: в черные вершины поместим различные простые числа, а в каждую белую – произведение чисел на концах выходящих из нее стрелок.

6.**1**. **Решение 1.** Пусть O – точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$. $2S_{AOB} = AO\cdot OB\cdot\sin\angle AOB$. Запишем аналогичные равенства для площадей остальных трех треугольников и заметим, что синусы всех четырех углов с вершиной O равны. Поэтому условие задачи приводит к равенству $AO\cdot BO + CO\cdot DO = BO\cdot CO + AO\cdot DO$. Перепишем его в

виде $(AO - CO)(BO - DO) = 0$. Если первая скобка равна 0, то O – середина диагонали AC, если вторая – диагонали BD.
Решение 2. Пусть середина K диагонали AC не совпадает с O. Площадь треугольника ABO отличается от площади треугольника CBO на $2S_{BOK}$ (поскольку $S_{ABK} = S_{CBK}$), а площадь треугольника CDO от площади треугольника ADO на $2S_{DOK}$. Поэтому указанное в условии равенство возможно только в случае $S_{BOK} = S_{DOK}$, то есть, когда KO – медиана треугольника.

6.2. К вершине большого куба прилегают три соседние грани "маленького" кубика, поэтому в сумме на этих гранях есть 6 точек. Значит, всего на поверхности большого куба – 48 точек. Но 48 не может быть суммой шести последовательных чисел: в такой сумме ровно три нечетных слагаемых, поэтому она нечетна.

6.3. После умножения обеих частей неравенства на знаменатель правой части и приведения подобных членов получим:

$$(1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k)n^k \le (2^k + 3^k + \ldots + n^k)(n-1)^k.$$

Таким образом, достаточно убедиться в справедливости неравенства
$(m-1)^k n^k \le m^k(n-1)^k$ при $m = 2, 3, \ldots, n$. Это просто:

$$(m-1)^k n^k \le m^k(n-1)^k \iff (m-1)n \le m(n-1) \iff m \le n.$$

Замечание. Исходное неравенство нетрудно доказать и по индукции.

6.4. **а**) Например, положим $a_{10n} = 1 + 2^{-n}$ $(n > 0)$, $a_{10n+1} = -1$ $(n \ge 0)$, а на остальные места последовательности $\{a_k\}$ поставим нули. Тогда среди любых десяти подряд идущих чле-нов последовательности имеется восемь нулей, одна минус единица, и одно число, боль-шее единицы. Значит, их сумма положительна. А сумма первых $10n + 1$ членов равна -2^{-n}.
Идеология. Условие задачи на вид противоречивы, но «положительные» и «отрицательные» наборы все же не совсем совпадают. Попробуем на этом сыграть. Легко видеть, что числа a_{11}, a_{21}, a_{31}, …, a_{10n+1} должны быть отрицательны, чтобы добавив их к сумме n «положительных» десятков, получить отрицательную сумму. Но и $a_1 < 0$ – ведь сумма первых одиннадцати членов состоит из a_1 и следующего за a_1 положительного десятка. Более того, сумма первых $10n+1$ чисел состоит из a_1 и следующих за ним n положительных десятков. Значит, прибавляя к a_1 *сколь угодно много* положительных сумм мы должны умудриться не превзойти 0. Противоречие? Да нет, кто сказал, что мы обязаны прибавлять помногу? Будем прибавлять числа все меньшие и меньшие, но положительные. Пример конечной суммы из бесконечного числа положительных слагаемых дает убывающая геометрическая прогрессия. Итак, положим $a_1 = -1$ и сделаем суммы следующих десятков равными $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, ...
б) Рассмотрим произвольную последовательность $\{a_k\}$ целых чисел. Возьмем $n > |a_1|$. Если сумма любых десяти идущих подряд членов положительна, то она не меньше 1. Поэтому сумма $a_2 + a_3 + \ldots + a_{10n+1}$ не меньше n. Значит, сумма $10n + 1$ первых членов положительна, то есть требуемой последовательности не существует.

XXII Турнир городов

1.**1**. Разобьем все клетки на 6 групп (на рисунке клетки каждой группы обозначены своей буквой). Каждая группа состоит из всех соседей какой-то одной клетки, поэтому сумма чисел в ней равна 1. Следовательно, сумма всех чисел равна 6.

Замечание. В условии подразумевается, что нужная таблица существует, поэтому пример таблицы в решении приводить не требуется. Дотошный читатель может убедиться, что такие таблицы не только существуют, но и исчерпываются указанными справа таблицами, где a и b – произвольные параметры.

a	b	$1-a$	$1-b$
$1-b$	0	0	a
$1-a$	0	0	b
b	a	$1-b$	$1-a$

1.**2**. **Решение 1**. Соединим вершину C с серединой K стороны AB (рис. 1). $AKCM$ – параллелограмм (стороны AK и MC равны и параллельны). Отсюда $CK \parallel AM$, поэтому $CK \perp BH$ и LK – средняя линия треугольника ABH (L – точка пересечения CK и BH). Таким образом, CL является как высотой, так и медианой треугольника BCH. Значит, этот треугольник равнобедренный.

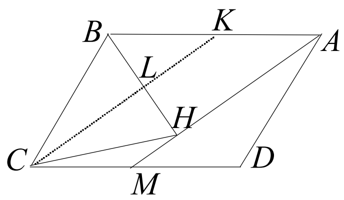


Рис. 1.

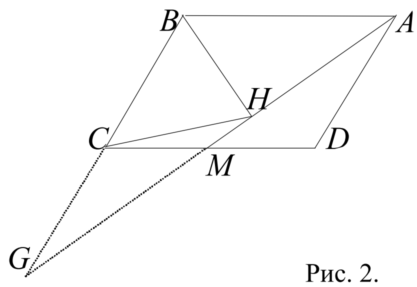


Рис. 2.

Решение 2. Продолжим AM до пересечения с прямой BC в точке G (рис. 2). Треугольники GCM и ADM равны по стороне ($CM = DM$) и двум прилежащим к ней углам. Поэтому $BC = CG$ и HC – медиана прямоугольного треугольника BHG. Как известно, *медиана прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы*, то есть $HC = BC$.

1.**3**. **а**) Применим принцип крайнего: рассмотрим восемь наименьших чисел. Добавив к ним девятое число, мы увеличим среднее арифметическое. Таким образом, среднее ариф-метическое восьми наименьших чисел меньше среднего арифметического девяти наи-меньших чисел (и, тем более, среднего арифметического любых других девяти чисел).

б) Рассмотрим наименьшие девять чисел. Заметим, что они равны. Действительно, в противном случае, восьмое (тем более, девятое) по величине число больше среднего арифметического наименьших восьми чисел и это среднее арифметическое (как и в пункте **а**) не может равняться среднему арифметическому никаких девяти чисел.

Вычтем из всех чисел наименьшее. Для полученной системы чисел (где наименьшие девять чисел равны нулю) условия задачи также выполнены.

Предположим, что не все полученные числа равны нулю. Разделим все числа на наи-больший общий делитель всех 100 чисел. Условия задачи выполнены и для полученной системы чисел (наибольший общий делитель которых теперь равен 1).

Докажем *в противоречие с этим*, что все числа делятся на 8. Рассмотрим любое отлич-ное от нуля число a. Присоединив к нему семь нулей (семь первых чисел), получим группу чисел со средним арифметическим $\frac{a}{8}$. По условию, найдутся такие целые числа $b_1, \ldots, b_9$, что $\frac{a}{8} = \frac{b_1 + \ldots + b_9}{9}$. Число $9a = 8(b_1 + \ldots + b_9)$ делится на 8. Значит, и a делится на 8.

Замечания. 1. В пункте б), предположив противное, мы, по существу, пытались построить <u>минимальный контрпример</u>, и выяснили, что его нет.

2. Утверждение (б) верно для произвольных чисел – не обязательно целых: см. Д22.1.3.

1.**4**. См. 2.4.

2.1. Угол CKA измеряется полусуммой дуг AC и MB, угол MNL – полусуммой дуг AB и MB. Если четырехугольник вписанный, то углы CKA и MNL равны. Следовательно, равны и дуги AB и AC, а значит, и стягивающие их хорды.

2.2. В противном случае число $ad - bc$ делилось бы на собственный квадрат.

2.3. В прямой призме каждая боковая грань – прямоугольник, поэтому $\varphi = 90°$ подходит. Допустим, $\varphi \neq 90°$. Можно считать, что $\varphi < 90°$ (если в параллелограммах равны тупые углы, то равны и острые). Проведем в плоскости основания через одну из вершин V прямые, параллельные каждому из ребер основания. Эти прямые образуют угол φ с выходящим из V боковым ребром r. Однако таких прямых в данной плоскости – *не более двух* (всевозможные прямые, проходящие через V под углом φ к r образуют поверхность конуса. Она пересекает плоскость основания не более чем по *двум прямым*.). Итак, для ребер основания есть только два направления. Поэтому не менее трех ребер направлены одинаково. Два из них окажутся соседями. Противоречие.

2.4. **а**) При каждом взвешивании будем класть на весы все 32 монеты. Изначально у нас есть одна куча, в которой есть две фальшивые монеты. Сделаем из нее пару вдвое меньших куч и разложим их на разные чаши весов. Если фальшивки попали в разные кучи, то будет равновесие (и задача решена), а при неравновесии мы знаем, что обе фальшивки оказались в одной и той же куче. Снимем кучи с весов и удвоим их количество, разбив каждую старую кучу на пару новых. При следующем взвешивании будем класть половинки одной кучи на разные чаши. Снова при неравновесии мы знаем, что фальшивки оказались в одной куче. Так мы делаем 4 взвешивания: при первом на каждой чаше одна куча из 16 монет, при втором – две по 8 монет, при третьем – четыре по 4, при четвертом – восемь по 2. По тому же принципу разложим монеты на чаши для пятого взвешивания, только проводить его не надо: на этот раз фальшивки наверняка на разных чашах, значит, должно наступить равновесие.
Замечание. Знатоки могут сказать то же самое проще, используя двоичную кодировку.
б) **Решение 1**. Как и в а), будем взвешивать каждый раз все монеты и перед каждым взвешиванием удваивать число куч, деля каждую старую на пару новых. Метод потребует лишь небольшого уточнения. А именно, если в старой куче число монет нечетно (например, 11), то делим ее «почти пополам»: так, чтобы число монет в «половинках» отличалось на единицу (11 = 5 + 6). При этом из первой нечетной кучи положим меньшую половинку на левую чашу, а большую – на правую, со второй нечетной кучей поступим наоборот и т.д. Поскольку число нечетных куч *четно*, на чашах окажется поровну монет.
В результате при первом взвешивании у нас будут на каждой чаше кучи по 11, при втором 5 + 6, при третьем 2 + 3 + 3 + 3, при четвертом 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2, в случае четырех неравновесий обе фальшивки по-прежнему оказываются в одной куче, и после последнего взвешивания их можно будет гарантированно разложить по разным чашам
Решение 2. Отложив одну монету, разделим оставшиеся на три кучки по 7 монет. Легко видеть, что, где бы ни находились фальшивые монеты, две из этих трех кучек будут одного веса, а третья – другого. Достаточно двух взвешиваний, чтобы определить, какие именно две кучки имеют одинаковый вес.
Добавляя к третьей кучке оставшуюся монету, получаем кучку из 8 монет (она либо содержит обе фальшивые монеты, либо ни одной). Из **а**) ясно, как не более, чем за два взвешивания разделить ее на две кучки равного веса.

5.1. Заметим, что число $n = (n - 1) + 1$ можно заменить на $n - 1$. Поэтому достаточно получить число большее 2001 (что нетрудно сделать), а потом отнимать от него по 1.
Замечание. Приведем два коротких пути (их легче найти обратным ходом):
$22 = 20 + 2 \to 40 = 38 + 2 \to 76 = 59 + 17 \to 1003 = 1001 + 2 \to 2002 \to 2001;$
$22 \to 21 \to 20 \to 19 \to 18 = 11 + 7 \to 77 = 67 + 10 \to 670 = 667 + 3 \to 2001.$

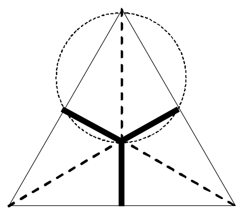
5.2. **Решение 1.** Пусть M – середина стороны AB, N – середина стороны BC треугольника ABC и MN – указанная средняя линия. Разберем два случая.
1) $MN > AN$. Тогда из треугольника MNA получаем, что $\angle MAN > \angle AMN$, откуда $\angle AMN < 90°$, а значит, $\angle BAC = 180° - \angle AMN > 90°$.

2) $MN > BK$, где K – середина AC. Тогда $AK > BK$, и из треугольника AKB получаем, что $\angle ABK > \angle BAK$. Аналогично $\angle CBK > \angle BCK$, откуда
$\angle ABC = \angle ABK + \angle CBK > \angle BAC + \angle BCA$, то есть угол ABC – тупой.
Вариант. В случае 2 рассмотрим окружность с центром K и радиусом KA. Точка B лежит внутри окружности, поэтому угол B – тупой.

Решение 2. Пусть указанная медиана выходит из вершины A. Достроим треугольник до параллеллограмма $ABDC$. Диагональ AD – не является наибольшей (она меньше либо стороны, либо второй диагонали). Следовательно, угол A – тупой.

5.3. Пусть s_k – средний вес сыра, проданного первым k покупателям. По условию $20 - ks_k = 10s_k$, отсюда $s_k = \dfrac{20}{k+10}$ кг, а после k-го покупателя остается $\dfrac{200}{k+10}$ кг сыра. Так как полученная последовательность убывает, то продавщица может делать такое сообщение после *каждого* покупателя (не ограничиваясь первыми десятью). После 10-го покупателя осталась ровно половина сыра – 10 кг.
Замечание. Эта задача является дискретным аналогом задачи 6.1.

5.4. **а**) Рассмотрим, например, прямоугольный треугольник, у которого один катет в 5 раз больше другого. Четыре таких треугольника, расположенных так, что их больший катет горизонтален, очевидно, не смогут накрыть пятый, у которого больший катет вертикален.
б) Докажем, что любой треугольник можно накрыть даже *тре-мя* другими. Разобьем треугольник, который нужно накрыть, на три части, опустив перпендикуляры из центра треугольника на его стороны (см. рис.). Мы можем накрыть каждый из полученных четырехугольников одним из данных треугольников, совместив центры вписанной окружности треугольника и описанной окруж-ности четырехугольника (как легко видеть, радиусы их равны).



5.5. Введем на доске “систему координат”: занумеруем горизонтали и вертикали числами от 1 до 15. Если ладьи не бьют друг друга, то в каждой горизонтали и в каждой вертикали находится ровно одна ладья, поэтому сумма координат всех ладей равна
$2\cdot(1 + 2 + \ldots + 15)$, то есть *четна*. Когда ладья передвинута ходом коня, сумма ее координат изменяется на 1 или на 3, то есть меняет *четность*. Так как количество ладей нечетно, после перестановки сумма координат всех ладей *нечетна*. Следовательно, некоторые ладьи бьют друг друга.

6.1. Пусть за t часов после начала движения автобус проехал s км. Тогда его средняя скорость на пройденной части маршрута равна $\dfrac{s}{t}$. По условию, двигаясь с такой скоростью, автобус за час пройдет $100 - s$ км, то есть $\dfrac{s}{t} = 100 - s$. Отсюда получаем, что автобус должен двигаться по закону $s = \dfrac{100t}{1+t}$. Легко проверить, что функция $s = \dfrac{100t}{1+t}$ *строго возрастает*. Поэтому движение по такому закону возможно. При $t = 5^2/_3$ получаем $s = 85$.

6.2. **Решение 1**. По условию $10^{n-1} \le a < 10^n$, следовательно
$10^{3n-3} \le a^3 < 10^{3n}$. В записи чисел 10^{3n-3} и 10^{3n} соответственно $3n-2$ и $3n+1$ цифр, поэтому $3n-2 \le m < 3n+1$, откуда $4n-2 \le n+m < 4n+1$. Таким образом, $n + m$ не может давать остаток 1 при делении на 4, в частности, *не может* равняться 2001.
Решение 2. Ясно, что сумма $n + m$ не убывает с ростом a. Число 10^{500} – наименьшее 501-значное число, а его куб 10^{1500} – наименьшее 1501-значное число. Для этого числа $n + m = 2002$. Если же уменьшить число 10^{500} на единицу, то мы получим 500-значное число $10^{500} - 1$, куб которого имеет не более 1500 знаков, то есть $n + m \le 2000$. Таким образом, промежуточное значение $n + m = 2001$ *не реализуется* ни для какого натурального a.)

6.3. **Решение 1**. Продолжим AY за точку Y на отрезок $YD = YB$. Треугольники ABY и CDY равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $CD = AB = CZ$, то есть треугольник DCZ – равнобедренный. Значит, $\angle DZC = \angle D = \angle B$, поэтому четырехугольник $BXZY$ – вписанный.
Идеология. Дополнительное построение идет от желания использовать равенство $AB = ZC$. Естественно свести равные отрезки в равнобедренный треугольник. Отложим $CD = AB$ так, чтобы точка D попала на прямую AY. Нетрудно заметить, что $ABDC$ – равнобедренная трапеция. В частности, $YB = YD$. Вот с этого равенства и начнем...

Решение 2. По теореме синусов из треугольников ABY и YZC получим $\dfrac{\sin B}{AY} = \dfrac{\sin \angle AYB}{AB}$, $\dfrac{\sin \angle ZYC}{CZ} = \dfrac{\sin \angle YZC}{CY}$. Так как $AB = CZ$, $AY = CY$ и $\sin\angle AYB = \sin\angle ZYC$ (эти углы в сумме дают 180°), то $\sin B = \sin \angle YZC = \sin \angle YZX$.
Поскольку углы YZX и B не равны ($\angle YZX > \angle AXC > \angle B$), то $\angle YZX + \angle B = 180°$, и значит, четырехугольник $BXZY$ – вписанный.

6.4. Разобьем доску на 50 прямоугольников 3×2. Пусть первый каждым ходом ставит доминошку в середину одной из свободных частей до тех пор, пока это возможно. Каждая доминошка второго целиком лежит в одной из частей, поэтому первый сделает по этой стратегии не менее 25 ходов. После того, как в каждой части стоит по крайней мере по одной доминошке, первый может еще сделать не менее 50 ходов в тех частях, где стоят его доминошки. Второй же сможет сделать не более 25 ходов – в тех частях, где стоят его доминошки (в те части, где стоят доминошки первого, второй пойти не может).

6.5. Разобьем каждую грань тетраэдра средними линиями на четыре равносторонних треугольника. Назовем *кульком* объединение трех таких треугольников, прилегающих к одной вершине тетраэдра. Теперь поверхность тетраэдра разбита на 8 частей: 4 кулька и 4 оставшихся треугольника. Так как отмеченных точек больше восьми, то по крайней мере две из них попадут в одну часть. Очевидно, что расстояние между этими точками не превышает $^1/_2$.

Словарик

И кое-что еще, и кое-что другое
О чем не говорят, чему не учат в школе.

Обозначения

N! – см. Факториал.
⇔ – равносильно, тогда и только тогда.
[x] – см. Целая часть.
{*x*} – см. Дробная часть.
НОД(*a, b*) – см. Наибольший общий делитель.
НОК(*a, b*) – см. Наименьшее общее кратное.

Негласные правила

Для какого наибольшего... предполагает решение из двух частей: приводится пример для конкретного числа и проводится оценка, показывающая что результат нельзя улуч-шить, то есть что при бóльших значениях примера не существует. Аналогично: **при каком наименьшем...**

Задачи на движение

Если не оговорено противное, то все объекты движутся с постоянными скоростями.

Игры

Если не оговорено противное, то
1. играют двое (Первый – он делает первый ход – и Второй);
2. игроки *ходят* по очереди;
3. каждый игрок знает все предыдущие ходы противника и видит позицию;
4. если играют на доске, то на каждое поле ставится не более одной фишки.

Обход ладьей подразумевает, что ладья не может перепрыгивать через клетки, то есть обходит хромая ладья.

Сумма цифр автоматически предполагает, что рассматриваемое число – целое неотрицательное.

Известные факты

Широкоизвестные факты, которым не всегда учат в школе.

Ладья

см. Шахматы.

Логика

Задачи на истинные и ложные высказывания (про лжецов и рыцарей), а также «я знаю, что ты не знаешь...».
Задачи: 19.7.4, 20.1.4, 24.1.2, 28.1.2.

Метод Штурма

См. Штурма, метод доказательства неравенств

Минимальный контрпример

см. Принцип крайнего

Задачи: 19.4.5, 22.1.3б, 23.3.6, 22.8.4-реш.1, 22.1.3.

Много-мало

см. Конструкции

Многочлены и разложение выражений на множители

Разложение на множители

Многочлен получается из переменных с помощью операций сложения, вычитания и умножения. Разложение таких выражений на множители часто оказывается шагом к решению задачи (см. 19.1.2, 19.2.3, 20.1.2, 23.5.3, 23.7.1, 25.8.5). Полезно помнить разложение для $x^n - y^n$, а также для $x^n + y^n$ при нечетном n (см. 21.1.2); эти же формулы помогут «свернуть» сумму, домножив на подходящий двучлен (см. 21.7.1). Раскладывать на множители можно не только для многочлены, но и выражения с неизвестными в показателе (см. 21.2.2), а также числовые суммы (см. 19.5.4, 19.6.2): достаточно мысленно заменить числа или степени на переменные. Впрочем, такая замена может также помочь «свернуть» и произведение (см. 19.4.3), особенно если опереться на единственность стандартного вида.

Стандартный вид

Многочлен *единственным* образом представляется как линейная комбинация произведений переменных, для одной переменной – в виде $P(x) = k_nx^n + \ldots + k_1x + k_0$.

Стандартный вид для степени или произведения многочленов легко находится, что позволяет иногда использовать многочлены для перемножения чисел (см. И31.7.4).

Числовые коэффициенты $k_n, \ldots, k_1, k_0$ связаны со значениями многочлена: $P(0) = k_0$, $P(1) = k_n + \ldots + k_1 + k_0$ (см. 28.6.2, 27.8.3), а также с корнями многочлена по теореме Виета (см. 25.8.5, 28.5.4, 24.7.1, 28.8.1).

Многочлены и корни

Разложение на множители многочленов от одной переменной тесно связано с корнями:

Теорема Безу. Многочлен $P(x)$ делится на $x - a$ $\Leftrightarrow$ a – корень многочлена.

Действительно, если $P(x) = Q(x)(x - a)$, то $P(a) = Q(a)\cdot(a - a) = 0$. Обратно, пусть
$P(a) = 0$. Запишем многочлен в стандартном виде. Тогда
$P(x) = P(x) - P(a) = k_n(x^n - a^n) + \ldots + k_2(x^2 - a^2) + k_1(x - a)$, и каждая скобка делится на
$(x - a)$. ♦

Для многочленов от нескольких переменных полезен такой, например, аналог: если многочлен обращается в ноль при $x = y$, то он делится на $x - y$ (см. 19.2.3). Но главное следствие теоремы Безу – это

Теорема о числе корней. Многочлен степени n имеет не более n различных корней.

Действительно, если a – корень многочлена $P(x)$, то $P(x) = (x- a)Q(x)$, где степень $Q(x)$ равна, очевидно, n–1. Если b – *другой* корень многочлена $P(x)$, то $P(b) = (b-a)Q(b) = 0$, но $b-a \neq 0$, поэтому $Q(b) = 0$. Значит, от $Q(x)$ «отщепляется» множитель $(x-b)$ и $P(x) = (x- a)(x- b)R(x)$, где степень $R(x)$ равна, очевидно, n–2. Так как степень последнего множителя не может опуститься ниже нулевой, то и отщепить можно не более n раз.♦

Следствия. 1. Если два многочлена степени не выше n совпадают в n+1 точке, то они тождественно равны.

Действительно, разность этих многочленов имеет степень не выше n и n+1 корней, и. следовательно, равна нулю. ♦

2. Если два многочлена совпадают в бесконечном числе точек, то они тождественно равны.

3. У многочлена степени n не более n участков монотонности.

Действительно, границы участков – это корни производной, а ее степень равна n–1.♦

Теорема о числе корней и ее следствия очень часто применяется в задачах, где не дан конкретный вид многочлена (см. 26.2.3, 26.8.4, 28.8.3).

Многочлены с целыми коэффициентами

Если $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, а m и n – различные целые числа, то $P(m) - P(n)$ нацело делится на $m - n$.

Действительно, $P(x) - P(n) = (x-n)Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами (см. рассуждение в теореме Безу). Теперь подставим $x=m$. ♦

См. 26.8.1.

Симметрические многочлены – это многочлены от нескольких переменных, которые не меняются при любой перестановке этих переменных. В частности, *элементарные симметрические многочлены* от двух переменных x и y – это $x + y$ и xy, а от трех переменных x, y и z – это $x+ y + z$, $xy + xz + yz$ и xyz. В общем случае *элементарный симметрический многочлен* степени k от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – это коэффициент при Y^{n-k} в многочлене $(Y + x_1)(Y + x_2)\ldots(Y + x_n)$.

Основная теорема

а) Всякий симметрический многочлен представляется в виде многочлена от элементарных симметрических.

б) Всякий симметрический многочлен от n переменных представляется в виде многочлена от $s_1, s_2, \ldots, s_n$, где s_k – это сумма k-х степеней переменных.

Примеры. а) Обозначим как в теореме Виета $x+y = -p$, $xy = q$. Тогда

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = -p^3 + 3pq.$$

б)

$$6xyz = (x+y+z)^3 - 3(x^2+y^2+z^2)(x+y+z) + 2(x^3+y^3+z^3) = s_1^3 - 3s_2s_1 + 2s_3$$

Часто бывает удобно выразить одни симметрические многочлены через другие (см. 20.4.3, 20.4.5, 28.3.3, Д28.3.3).

Задачи: 19.1.2, 19.2.3, 19.4.3, 19.5.4, 19.6.2, 20.1.2, 20.4.3, 20.4.5, 21.1.2, 21.2.2, 21.7.1, 22.8.1, 23.5.3, 23.7.1, 24.7.1, 24.8.2, 25.8.5, 26.2.3, 26.8.1, 26.8.4, 27.8.3, 28.3.3, Д28.3.3, 28.5.4, 28.6.2, 28.8.1, 28.8.3, И15.7.5, И31.7.4

Наибольший общий делитель

см. НОД и НОК

Наименьшее общее кратное

см. НОД и НОК

Невыпуклые многоугольники

Внутренняя диагональ

В каждом невыпуклом многоугольнике есть *внутренняя диагональ*. Действительно, выпустим из вершины угла ABC, большего 180°, «луч света» и будем его поворачивать из положения BA в положение BC. Его конец не может все время скользить по одной стороне многоугольника (каждая сторона видна из вершины B под углом, меньшим 180°), поэтому в момент «перехода» он упрется в вершину.

Подробности см. [Прас, зад. 22.20]

Сумма внешних углов любого многоугольника (как выпуклого, так и невыпуклого[2]) равна 360°. Отсюда следует, что *сумма* (*внутренних*) *углов* n-угольника равна $180°(n-2)$.

Доказательство. Проведем индукцию по числу сторон. Для треугольника утверждение известно. Для проведения шага индукции разобьем многоугольник M внутренней диагональю AB на два многоугольника с меньшим числом сторон и обозначим их суммы внешних углов соответственно S, S_1 и S_2. Сравним S с $S_1 + S_2$. Изменения происходят только в точках A и B. Пусть угол A, равный α, разбился на углы α_1 и α_2. Тогда слагаемое $(180° - \alpha)$ в S заме-нится в $S_1 + S_2$ на $(180° - \alpha_1) + (180° - \alpha_2) = 180° + (180° - \alpha)$, то есть увели-чится на 180°. Поэтому $S - 360° = S_1 + S_2$, и так $S_1 = S_2 = 360°$, то и $S = 360°$.

Задачи: 19.4.2, 26.5.5.

Непрерывная комбинаторика

В этих задачах возникают комбинации из *конечного* числа объектов, но сами объекты выбираются из *бесконечного* набора, заданного *непрерывным параметром* или параметрами. Кроме того, отношения между объектами и наборами задаются в первую очередь неравенствами.

Соответственно, работа с неравенствами и служит главным средством при решении таких задач. Но неравенства нужно правильно выбрать. Основные приёмы: применить принцип крайнего (см. 23.6.3, 24.6.2, 27.3.6, 28.3.2), упорядочить объекты (см. 23.6.3, 27.8.6, 28.3.2), свести к известному неравенству, скажем, к неравенству между средним арифметическом и средним геометрическим (см. 26.3.4). Если в задаче есть равенство каких-то величин, полезно записать неравенства с участием именно этих величин (см. 26.3.4, 27.5.3, 27.6.3).

В геометрических задачах (см. 24.6.2, 27.1.3, 24.4.2) чаще всего опираются на *неравенство треугольника.*

---

[2] Если внутренний угол α многоугольника больше 180°, то соответствующий внешний угол, равный $180° - \alpha$, будет отрицательным.

В сложных случаях помогает разбиение области значений параметра на несколько интервалов *(*см. 27.1.3, 26.3.6, 27.3.6).
Задачи: 23.6.3, 24.4.2, 24.6.2, 26.3.4, 26.3.6, 27.1.3, 27.3.6, 27.5.3, 27.6.3., 27.8.6, 28.3.2.

Непрерывность обычная и дискретная

Из соображений непрерывности чаще всего доказывают существование или невозмож-ность некого объекта или конструкции, не предъявляя его явно.

Если объекты или ситуации задачи четко делятся на две категории («два берега»), и если путь (процесс) начинается на одном берегу, а заканчивается на другом, то придется переправляться. Часто именно это и решает задачу.

Обычно у нас есть некоторая величина, которая меняется *непрерывно*. Тогда она принимает все значения между начальным и конечным. Если значение между ними соответствует «переправе», она непременно произойдет (см. 25.6.3, 28.8.3). Наоборот, если «переправа» по условию невозможна, то «другой берег» недостижим (см. 27.3.4) или условие противоречиво (см. 28.3.2).

«Переправа» может возникать и при пересечении ломаных (см. Д26.7.5).

Дискретная величина принимает только целочисленные значения, но если она на каждом шаге изменяется не более чем на 1 (*дискретно непрерывна*), то обязательно примет все целые значения между начальным и конечным (см. 23.2.2, И30.3.7).

Подходящую величину можно ввести самим. Например, для доказательства равенства двух величин в некоторый момент можно последить за их разностью. Это особенно эффективно, если значения величин в процессе как бы меняются местами: идущий из A в B встречает идущего из B в A (см. 20.7.4).

Бывает что величина (или «берега») есть, а нет процесса. Тогда нужно организовать процесс, причем так, чтобы «на переправе» был достигнут нужный эффект (см. Д24.3.7), скажем, возникало *узкое место*. (см. 24.2.5)
Ключевая задача: 23.2.2.
Задачи: 20.7.4, 23.4.3, 24.2.5, 24.3.3, Д24.3.7, 25.6.3, Д26.7.5, 27.3.4, 27.5.4, 28.3.2, 28.8.3, И30.3.7.

Неравенства

см. Уравнения и неравенства

Неравенства в геометрии

Здесь собраны задачи на доказательство и использование геометрических неравенств.

Помимо обычных свойств неравенств мы можем пользоваться известными геометриче-скими неравенствами.

Наиболее известно *неравенство треугольника* (см. 19.2.2, 23.7.1, 24.4.2, 24.6.2, 25.2.4а, 25.6.3а, 27.1.3), которое используют и для нахождения *кратчайшего пути* (см. 25.3.6).

Нередко встречаются *неравенство сторон и углов* (против большей стороны в данном треугольнике лежит больший угол, в частности, гипотенуза длиннее катета (см. 22.5.2, 23.4.4, 25.3.5, 25.3.6) и *неравенство третьих сторон* (если две стороны треугольника неизменны, то третья тем больше, чем больше противолежащий угол, см. 27.3.2, 23.4.4).

Удобно получать неравенства из неравенств для тригонометрических функций (см. 24.6.3, Д24.6.3).

В стереометрии надо иметь в виду *неравенства для многогранных углов*:

1) *сумма плоских углов при вершине многогранного угла меньше* 360° (см. 21.4.7);

2) неравенство треугольника для трехгранного угла (*сумма любых двух плоских углов больше третьего*, см.25.2.5).

Некоторые неравенства естественно получаются из того, что одна фигура лежит внутри другой (см. 25.3.5, 24.7.2, 24.8.1, 25.2.4б).

Задачи на применение неравенств к площадям или использование площадей для доказательства неравенств отнесены к подборке «Площади».

Задачи: 19.2.2, 21.4.7, 22.5.2, 23.4.4, 23.7.1, 24.4.2, 24.6.2, 24.6.3, Д24.6.3, 24.7.2, 24.8.1, 25.2.4, 25.2.5, 25.3.5, 25.3.6, 25.6.3а, 27.1.3, 27.2.4, 27.3.2.

Неравенство Иенсена

Пусть функция f *выпукла вниз*, то есть $f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b)$ для $t \in [0, 1]$ и любых a, b. Тогда $f(t_1a_1+\ldots+ t_na_n) \le t_1f(a_1) + \ldots + t_nf(a_n)$ для любых $a_1, \ldots, a_n$ и неотрицательных $t_1, \ldots, t_n$ с суммой 1.

Геометрически условие выпуклости вниз означает, что любая хорда, соединяющая точки графика, лежит не ниже графика. Легко проверить выпуклости, у которой есть непрерывная вторая производная: $f(x)$ выпукла вниз $\Leftrightarrow f''(x) \ge 0$.

Доказательство неравенства Иенсена проведем индукцией по n. *База* при $n = 2$ совпадает с определением выпуклости.

Шаг индукции. Обозначим $t = t_1 + \ldots + t_{n-1}$, тогда $t_n = 1 - t$ и $\frac{t_1}{t}+\ldots+\frac{t_{n-1}}{t} = 1$.

Обозначим $a = \frac{t_1}{t}a_1 + \ldots + \frac{t_{n-1}}{t}a_{n-1}$, тогда к сумме в правой части можно применить неравенство Иенсена по предположению индукции. Тем самым

$$f(t_1a_1 + \ldots + t_na_n) = f(ta + t_na_n) \le tf(a) + t_nf(a_n) \le t\left(\frac{t_1}{t}f(a_1)+\ldots+\frac{t_{n-1}}{t}f(a_{n-1})\right) + t_nf(a_n) =$$

$$= t_1f(a_1) + \ldots + t_nf(a_n).$$

Задачи: 28.4.7.

Неравенство обратных чисел

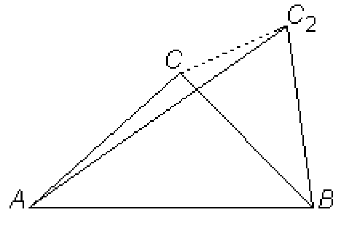
Если a и b – одного знака, то $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$.

Действительно, это равносильно неравенству $\frac{(a-b)^2}{ab} \ge 0$.

Задачи: 19.8.1.

Неравенство третьих сторон треугольников

Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$, то $\angle B < \angle B_1 \Leftrightarrow AC < A_1C_1$.



Достаточно доказать только прямое утверждение.

Можно считать, что $AB \le BC,$ тогда $\angle C < 90°$. Построим равный $A_1B_1C_1$ треугольник ABC_2 так, что луч BC лежит внутри угла ABC_2 (см. рис). Заметим, что четырехугольник ABC_2C выпуклый ($\angle ACC_2 < 180°$ как сумма двух острых). Имеем: $\angle AC_2C < \angle BC_2C = \angle BCC_2 < \angle ACC_2$.

Следовательно, в треугольнике ACC_2 сторона AC меньше стороны AC_2.

Замечание. Разумеется, приведенное утверждение – тривиальное следствие теоремы косинусов.

Задачи: 23.4.5, 27.3.2.

Неравенство средних

см. Свойства средних

Неравенство треугольника

см. Неравенства в геометрии

Задачи: 19.2.2, 24.4.2, 24.6.2, 25.2.4а, 25.6.3а, 27.1.3.

Неравенство Чебышева

Если $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$, $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$, то $(x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n) \le n(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)$.

Доказательство. Раскрыв скобки, сократив и сгруппировав, получим равносильное неравенство $(x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_3y_1) + \ldots + (x_{n-1}y_n + x_ny_{n-1}) \le (n-1)(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)$. Оно получается сложением для всех пар индексов неравенств $x_iy_j + x_jy_i \le x_iy_i + x_jy_j$, а эти неравенства равносильны неравенствам $(x_i - x_j)(y_i - y_j) \ge 0$, выполненным в силу условия (обе скобки одного знака).

Задачи: 24.2.4, И29.3.5.

НОД и НОК

Наибольший общий делитель*,* **НОД** – наибольшее натуральное число, которое делит данные целые числа. Известно, что любой другой *общий делитель* делит НОД. Если НОД равен 1, то числа называются *взаимно простыми*.

Наименьшее общее кратное*,* **НОК** – наименьшее натуральное число, которое делится на данные целые числа. Известно, что любой другое *общее кратное* делится на НОК.

Произведение НОД и НОК

Если m и n – натуральные числа, то НОК$(m, n)\cdot$НОД$(m, n) = mn$.

Действительно, пусть $d =$ НОД(m, n), $M =$ НОК(m, n). Очевидно, число $\frac{mn}{d}$ является общим кратным чисел m и n, поэтому $\frac{mn}{d} \ge M$, т.е. $mn \ge Md$. С другой стороны, $\frac{mn}{M}$ является общим делителем чисел m и n, поэтому $\frac{mn}{M} \le M$, т.е. $mn \le Md$.

Задачи: 20.3.1, 20.4.1, 20.8.3, 23.4.2, 24.3.2.

Обратный ход

Это в жизни неудобно ходить «задом наперед», а в математике такое случается сплошь и рядом: например, при решении уравнений. Очень практично пустить в обратном направлении процесс с известным результатом, но неизвестным началом (см. 28.7.7). Обратный ход упрощает перебор, когда шаг назад можно сделать меньшим числом способов, чем шаг вперед (см. 22.5.1). Если «прямой» и обратный ход выглядят одинаково, эффект может быть достигнут за счет их сравнения (см. 25.7.5, 25.8.2). Обратный ход может заключаться и в выполнении шагов вперед, но в обратном порядке (см. 28.5.2).
Задачи: 22.5.1, 25.7.5, 25.8.2, 28.5.2, 28.7.7.

Общее положение точек

Общее положение точек – свойство «наугад взятого» набора, свойства подавляющего большинства наборов.

- *Точки общего положения на плоскости* – никакие три из них не лежат на одной прямой.
- *Точки общего положения в пространстве* – никакие четыре из них не лежат в одной плоскости.

Задачи: 25.1.4.

Окружности

Львиная доля задач с окружностями решается за счет удачной комбинации небольшого числа перечисленных ниже фактов, в основном широко известных и простых. Менее известны, но также полезны ориентированные углы, окружность Аполлония (подробнее о них написано в отдельных статьях).

Углы и дуги (вписанные углы)

Чаще всего проходит подсчет углов с использованием равенства вписанных углов (включая угол между хордой и касательной) и связи вписанного и центрального угла (см. 19.3.4, 20.2.2, 20.7.2-реш.1, 23.3.4, 25.2.4б, 27.7.6, 28.2.2, 28.7.6), а также измерения угла полусуммой или полуразностью дуг (см. 22.2.1, 20.3.4-реш.2). Среди прочего, таким подсчетом доказывают принадлежность четырех точек одной окружности (вписанность четырехугольника) (см. 19.6.5, 20.8.2, 22.6.3, 22.7.3, 23.5.4, 24.3.4-реш.1, 24.7.6, 25.2.4, 26.7.2, 20.7.5-реш.2,3.). Ориентированные углы позволяют проводить единообразные рассуждения для случаев взаимного расположения точек на окружности при подсчете углов (см. 26.8.2, 26.2.1, 24.4.5).

Хорды и касательные

Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр круга (см. 20.3.4, 24.8.4, 26.4.4, 26.7.2), равные хорды стягивают равные дуги (см. 20.3.4, 22.2.1) и лежат на одинаковых расстояниях от центра (см. 20.3.4-реш.1). Касательные перпендикулярны радиусу, проведенному в точку касания (см. 19.6.5, 20.8.2); равны отрезки двух касательных, проведенные из одной точки (см. 22.3.2, 25.6.1, 28.6.3, 20.7.5, а также тему Вписанные и вневписанные окружности).

Теоремы о произведении отрезков хорд и теорему о секущей и касательной можно сформулировать единообразно:

Пусть заданы окружность и не лежащая на ней точка X. Проведем через X прямую, пересекающую окружность в точках A и B ($A=B$ при касании). Тогда произведение $XA \cdot XB$ не зависит от выбора прямой.

Этот факт упрощает подсчеты, позволяя избегать рассмотрения лишних подобных треугольников (см. 20.7.2, 24.8.4, 25.7.4).

Окружность как ГМТ

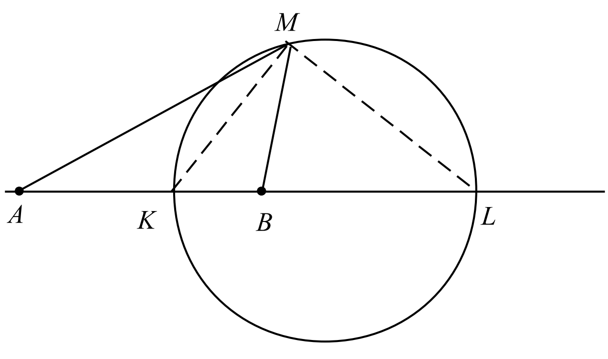
То, что искомое ГМТ является окружностью или дугой окружности, обычно доказывают счетом углов либо подсчетом расстояния (радиуса) до предполагаемого центра (см. 21.7.3, 26.4.4). Напомним, что надо еще проверить, что каждая из предъявленных точек удовлетворяет всем условиям.

Чаще, однако, ГМТ является не целью, а вспомогательным средством для решения задачи. Так, в ряде задач полезно построить окружность, отсутствующую в условии, и воспользоваться ее свойствами (см. 21.7.3, 22.7.3, 23.3.4, 23.4.1, 24.4.5, 24.7.6, 24.8.4, 25.2.4, 25.7.4, 26.4.7, 26.7.2). Но окружность уже есть ГМТ равноудаленных от центра! Также часто используется дуга окружности, как ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом (см. выше Углы и дуги, в частности 26.7.2, а также раздел Простая геометрия). Окружностями или дугами являются также менее известные ГМТ. Хорошая сводка таких ГМТ («азбука») есть в книге [ПиК]. Напомним в связи с этим про окружность Аполлония (*см.* 26.4.7-реш.2).

Задачи: 19.3.4, 19.6.5, 20.2.2, 20.3.4, 20.7.2, 20.7.5, 20.8.2, 21.7.3, 22.2.1, 22.3.2, 22.6.3, 22.7.3, 23.3.4, 23.4.1, 23.5.4, 24.3.4, 24.4.5, 24.7.6, 24.8.4, 25.1.2, 25.2.4, 25.6.1, 25.7.4, 26.2.1, 26.4.4, 26.4.7, 26.7.2, 26.8.2, 27.7.6, 28.1.4, 28.2.2, 28.6.3, 28.7.6.

Окружность Аполлония

Окружность Аполлония для двух точек A и B – геометрическое место точек плоскости , для которых $\dfrac{MA}{MB} = k$ (k – фиксированное число, отличное от 1).



Покажем, что это действительно окружность. Будем считать, что $k < 1$. Рассмотрим на прямой AB точки K и L, принадлежащие нашему геометрическому месту (K находится на отрезке AB, L – на луче AB вне отрезка AB). Пусть M – произвольная точка вне прямой AB, принадлежащая нашему геометрическому месту. Согласно свойству биссектрисы, MK – биссектриса угла M, а ML – биссектриса внешнего угла M треугольника AMB (см. рис.). Следовательно, угол KML – прямой, то есть M лежит на окружности с диаметром KL.

Очевидно, что на каждом луче, выходящем из B, есть по крайней мере одна точка нашего геометрического места. Поэтому оно занимает всю указанную окружность.

Задачи: 26.4.7.

Октаэдр

см. Правильные многогранники.
Задачи: 19.6.4, 28.2.5, 28.8.5.

Описанный многоугольник, свойство

В описанном многоугольнике с четным числом сторон сумма длин сторон, взятых через одну, равна полупериметру.

Утверждение, что при выполнении этого равенства многоугольник описан, верно только для четырехугольника.
Задачи: 28.3.4.

Ориентированные углы

Ориентированный угол между прямыми $\angle(l, m)$ – это угол, на который надо повернуть против часовой стрелки прямую l чтобы она стала параллельна прямой m. Углы, отличающиеся на 180°, 360°, ... , считаются равными.

Легко проверить, что для ориентированных углов выполнены свойства:

1) $\angle(l, m) = 180° - \angle(m, l) = -\angle(m, l)$;

2) $\angle(l, m) + \angle(m, n) = \angle(l, n)$;

3а) Точки A, B, C, D лежат на одной окружности $\Leftrightarrow$ $\angle(AC, CB) = \angle(AD, DB)$. Это верно и при совпадении точек: например, если A совпадает с C, то надо под AC понимать касательную к окружности в точке A.

3б) Пусть при обходе по окружности точки A, B, C лежат именно в таком порядке. Тогда дуги AB и BC равны $\Leftrightarrow$ $\angle(AD, DB) = \angle(BD, DC)$.

Это верно и когда точка D попадает на одну из дуг или совпадает с одной из точек A, B или C.

Свойства 3 объединяют три теоремы: о равенстве опирающихся на одинаковые дуги вписанных углов, о сумме углов вписанного четырехугольника, и об угле между касательной и хордой. Использование ориентированных углов и свойства (3) позволяет избегать перебора случаев со взаимным расположением точек на окружности.

Предостережение. Перечисленные свойства могут создать иллюзию, что арифметические операции с ориентированными углами во всем аналогичны обычным. Складывать, вычитать и умножать на целое их действительно можно. Однако равенства здесь по модулю 180°, поэтому деление запрещено! Нельзя поделить обе части: скажем, $2\cdot30° = 2\cdot120°$ (разность равна 180°), но $30° \neq 120°$. В частности, если ACB – вписанный, а AOB – центральный угол, опирающиеся на хорду AB, то $\angle(AO, OB) = 2\angle(AC, CB)$, но равенство $\angle(AC, CB) = {}^1/_2\,\angle(AO, OB)$ верно *не всегда*).
Задачи: 20.8.2, 24.4.5, 26.2.1.

Ориентация

Ориентация замкнутого несамопересекающего пути на плоскости – направление обхода. Различают два направления: против часовой и по часовой стрелке. Путь ограничивает многоугольник, и при обходе по часовой стрелке многоугольник всегда остается справа, а против часовой – слева.

Ориентация многоугольника задана, если задан порядок обхода его вершин. Если задано соответствие вершин двух многоугольников (например, при равенстве или подобии), то и обходы их друг другу соответствуют. Если пара обходов ориентирована одинаково, говорят что соответствие *сохраняет ориентацию* (иначе – *меняет ориентацию*). В частности, движения без выхода из плоскости (параллельный перенос и поворот) ориентацию сохраняют, а осевая симметрия (переворот в пространстве) – меняет.
Задачи: 19.4.2, 23.2.5, 26.2.1.

Ослабление условий

Метод *ослабления условий* состоит во временном отказе от части условий (или временной замене их на более слабые). Он примененяется для того, чтобы разбить сложную задачу на две простых. Задачу с ослабленными условиями легче решить, зато результат нуждается в доводке.

Типичный «школьный» пример: упрощение уравнения возведением в квадрат обеих частей. В результате приобретаются посторонние корни, которые нужно отбросить при проверке.

В задачах на поиск конструкции мы строим сначала «неполноценную» конструкцию , а потом доводим ее до нужной (см. Постепенное конструирование, 23.3.1, 25.2.5, 19.4.4, 23.8.7, 22.8.6). Частным случаем ослабления является *метод подобия* в задачах на построение: сначала строится фигура, подобная искомой (как правило, она удовлетворяет всем условиям задачи, кроме одного), а затем построенная фигура растягивается (сжимается) до нужного положения или размера (как правило, с помощью гомотетии) (см. 26.1.4, 19.3.2-реш.2).
Задачи: 19.2.4, 19.3.2, 19.4.2, 19.4.4, 22.8.6, 23.3.1, 23.8.7, 25.2.5, 26.1.4.

Оценка

Под *оценкой* мы понимаем неравенство, ограничивающее значение величины сверху или снизу. Оценка *достижима*, если неравенство может стать равенством (см. все задачи на *оценку+пример*, а также 20.2.1). Оценка *точна*, если она достижима, или если разность между величиной и ее оценкой может быть сколь угодно маленькой (см. 21.8.6). Оценки часто используют для доказательства невозможности, сводя задачу к невозможности достижения какого-то значения (см. 24.1.1, 28.4.4, 21.4.7, Д19.3.3). Возможно, однако, и доказательство через оценку существования нужного объекта, особенно в алгоритмах (см. И7.1.7, И32.8.7).

Оценка+пример

Эти задачи очень полезны начинающим: они учат смотреть на одну и ту же ситуацию с двух сторон. Как правило, пример состоит из конкретной конструкции, а оценка достига-ется рассуждением, что все конструкции с большим (или меньшим) значением параметра невозможны или не удовлетворяют условию задачи.

Принцип Дирихле

Под задачами на «принцип Дирихле» обычно понимают задачи, где *доказательство от противного* проводится помощью количественных оценок.

Сам принцип Дирихле обычно формулируется так: *если кроликов в клетках больше, чем клеток, то найдется клетка, где сидит не менее двух кроликов*.

Это очевидно и без доказательства (которое, впрочем, состоит в одной фразе: в противном случае число кроликов не превышало бы числа клеток).
Важный момент: мы доказываем *существование* клетки, *не предъявляя* самой клетки.
Иногда используется и двойственная формулировка: *Если кроликов меньше, чем клеток, то найдется пустая клетка*.

Стоит отметить, что область применения принципа Дирихле в чистом виде довольно ограничена. Тем не менее, умело выбирая «клетки и кроликов», можно доказывать и неочевидные утверждения (см, например, Кратная сумма).

Часто используются различные «обобщения» принципа Дирихле.

Например:

В любом наборе чисел найдется число, не меньшее их среднего арифметического, и число, не большее их среднего арифметического (см. 24.5.1).

Или для целых чисел:

Если в n клетках сидит больше kn кроликов, то найдется клетка, где сидит не менее k+1 кролика (см. 20.3.4, 22.2.3, 25.8.6).

Применение принципа Дирихле полезнее всего новичкам: это позволяет в простых случаях избежать формальной работы с неравенствами и учит четче формулировать свои мысли, выделяя в задаче «клетки» и «кроликов».

Заметим, что ввиду очевидности упомянутых формулировок отсутствие прямой ссылки на принцип Дирихле не является «дырой» в решении.
Задачи: 19.1.4, Д19.3.3, 19.4.5, 19.4.6, Д19.4.6, 19.6.3, 19.7.3, Д19.7.3, 19.7.5, 20.2.1, 20.2.3, Д20.2.3, 20.3.4, 20.5.5, 20.7.3, 21.3.1, 21.3.4, 21.4.7, 21.7.4, 21.7.5, 21.8.5, 21.8.6, 22.2.3, 22.3.6, 22.3.7, 22.4.2, 22.6.5, 22.7.4, 23.3.4, 23.3.5, 23.4.3, 23.4.4, 23.4.7б, 23.7.3, 23.7.5, 24.1.1, 24.1.3, 24.3.1, 24.3.5, 24.3.6-реш.2, 24.3.7, 24.4.7, 24.5.1, 24.5.4, 24.6.4, 24.7.5, 24.8.6, 25.1.5, 25.2.2, 25.3.4, 25.3.7, 25.5.5, 25.7.2, 25.8.6, 26.1.2, 26.2.2, 26.3.3, 26.5.3, 26.8.7, 27.1.3, 27.3.3, 27.3.5, 27.5.5, 27.6.5, 27.7.1, 27.7.5, 27.8.6, 28.1.5, 28.3.7, 28.4.4, 28.5.3, 28.6.1, 28.7.4, И7.1.7, И29.3.4, И32.8.7.

Оценка+пример – см. Оценка

Задачи: 19.1.4, Д19.3.3, 19.4.6, Д19.4.6, 19.6.3, 19.7.5, 21.3.1, 21.7.4, 21.7.5, 21.8.5, 21.8.6, 22.3.6, 22.3.7, 22.4.2, 23.3.5, 23.4.3, 23.4.4, 23.4.7б, 23.7.3, 24.1.3, 24.3.1, 24.3.5, 24.3.7, 24.4.7, 24.5.4, 24.6.4, 24.7.5, 24.8.6, 25.1.5, 25.2.2, 25.3.4, 25.3.7, 25.5.5, 25.7.2, 26.1.2, 26.2.2, 26.3.3, 26.5.3, 27.1.3, 27.3.3, 27.3.5, 27.5.5, 27.6.5, 27.1.3, 27.7.1, 27.7.5, 28.1.5, 28.3.7, 28.5.3, 28.6.1, 28.7.4.

Авторы задач

Некоторые задачи приписаны двум автором. Обычно это соавторы: работали совместно, или один доработал задачу другого. Соавтор просто указывается в скобках за номером задачи.

Более сложные случаи (например, переоткрытие задачи) разъяснены примечаниями. Некоторые задачи повторялись, полностью или частично, в разных вариантах. Если задача давалась дважды без изменений, оба номера идут через знак =. Если второй вариант включает первый, номера идут через знак <. Наконец, если давались две версии с незначительными отличиями, номера идут через знак ≈.

А. Акопян – 22.7.6=22.8.3, 23.5.4, 26.5.4=26.6.3, 26.7.3, 27.3.4=27.4.2
И. Акулич – 24.7.5
Г. Алиханов – 19.8.1
Н. Андреев – 28.8.1 (А.Блинков)
Б. Бегун – 20.2.5 (А. Канель-Белов)
А. Берзиньш – 19.3.1
А. Быстриков – 25.4.7, 25.6.4
С. Берлов – 22.5.5, 25.4.6 (А. Заславский, П. Кожевников)
А. Блинков – 20.5.2=20.6.2, 27.6.2 (В. Гуровиц), 28.8.1 (Н. Андреев)
И. Богданов – 25.5.4=25.6.2, 26.4.7 (П. Кожевников) , 26.8.6, 27.1.4, 27.2.4(В. Филимонов, Ю. Кудряшов), 27.2.5, 27.3.2, 27.3.5, 27.7.5, 28.6.5а<28.5.5 (М. Скопенков)
В. Бугаенко – 23.1.1, 23.6.2
Н. Васильев – 19.1.2, 19.2.3, И6.8.4 (А. Самосват)
М. Волчкевич – 22.1.2=18.5.5[3], 27.8.4, 28.7.6
С. Волченков – 26.7.5
М. Вялый – 19.1.4, 22.7.1, 22.8.2, 27.5.4
А. Гаврилюк – 27.7.3
Г. Гальперин – 19.5.4≈19.6.2[4], 19.6.4, 19.7.3, 19.8.6, 21.8.4, 22.6.2, 23.2.2, 23.3.7, 23.7.5, 24.4.2, 24.7.2≈24.8.1, 25.1.1, 25.5.2, 26.5.2, 26.6.2, 26.8.5, 27.1.1, 27.2.2, 27.6.1, 27.7.4<27.8.2, 28.1.3, 28.3.1, И18.7.6
А. Гладких – 28.2.5 (Л. Радзивиловский)
М. Гервер – 25.4.2, 28.1.2 (Б. Гинзбург)
А. Герко – 20.1.5
Б. Гинзбург – 28.1.2 (М. Гервер), И15.7.5
А. Горбачев – 23.7.4
Р. Гордин – 22.3.2, 28.1.4, 28.2.2, 28.3.4, 28.4.2 (П. Сергеев)
М. Горелов – 21.7.5
Е. Горский – 26.7.1=26.8.1, 28.1.1, 28.2.1 (С. Дориченко)
А. Грибалко – 28.3.3, Д28.3.3
И. Григорьева – 23.4.4
А. Гришин – 20.3.5
В. Гуровиц – 22.8.7, 27.6.2 (А. Блинков)
С. Дориченко – 23.5.1, 28.2.1 (Е. Горский), 28.5.1, 28.7.2 (Р. Женодаров, С. Токарев)
В. Доценко – 24.3.6=24.4.3
М. Евдокимов – 20.7.5, 25.2.4
Л. Емельянов – 21.4.4, 21.6.3, 23.6.5, 23.8.5
Н. Емельянов – 25.1.4
В. Жгун – 22.2.1
Р. Женодаров – 19.3.6<19.4.6, 20.2.3, 21.1.3, 21.2.3, 23.2.1, 22.1.1, 22.3.4, 22.3.6, 22.3.7, 22.4.3, 22.6.3, 23.3.4, 23.4.6, 24.1.1, 24.3.1, 24.3.4, 24.3.5, 24.4.3, 24.5.3, 24.5.5, 26.1.2≈26.2.2, 26.3.3, 26.5.5=26.6.4, 27.1.3, 27.3.1, 27.5.1, 27.5.5<27.6.5, 28.5.2, 28.5.3, 28.6.1, 28.6.2, 28.6.3, 28.7.2 (С. Дориченко, С. Токарев), 28.7.3
жюри – 24.7.3б, 27.7.2 (С. Токарев)
С. Зайцев – 22.7.4, 26.7.4, 27.5.2
А. Заславский – 20.7.2, 20.8.2, 21.8.2, 22.7.3 (И. Шарыгин), 23.5.2, 23.8.1, 24.2.3, 24.7.6, 25.4.6 (С. Берлов, П. Кожевников), 26.2.1, 26.3.2, 26.4.4, 26.7.2, 26.8.2, 28.8.7, И30.3.7

[3] Это не опечатка – задача была повторена через 4 года.

[4] Задачи Г.Гальперина 19.5.4 и 19.6.2 являются переоткрытием задачи С. Токарева 1995 г. (см. [Сав], задача 167).

Е. Зинин – 23.7.2 (П. Кожевников)
С. Злобин – 20.8.3, 21.8.1
И. Изместьев – 20.7.3
А. Калинин – 22.3.5
Д. Калинин – 25.2.2, 26.5.1
А. Канель-Белов – 19.2.4, 19.4.3, 19.4.4, 20.1.1, 20.2.5 (Б. Бегун), 20.4.6, 20.5.3=20.6.3[5], 20.6.5, 20.8.5, 21.4.7, 22.8.4, 22.8.6, 23.2.4, 25.7.5≈25.8.1, 25.7.6=25.8.4, 27.4.6, 28.8.5
Д. Кириенко – 24.1.2=24.2.1
В. Клепцын – 22.3.1, 22.5.1, 22.7.2, 24.7.1, И30.4.7
А. Ковальджи – 27.1.2
Ю. Кудряшов – 27.2.4 (В. Филимонов, И. Богданов)
Р. Кузнец – 21.7.1
А. Кустарев – 26.1.4
В. Колосов – 24.2.4
П. Кожевников – 19.3.4, 20.2.2, 20.3.3=20.4.2, 23.4.1, 23.7.2 (Е. Зинин) , 24.8.3, 25.3.1, 25.3.4, 25.4.4, 25.4.6 (С. Берлов, А. Заславский), 25.5.1, 26.4.7(И. Богданов), 28.8.3
С. Конягин – 26.8.7
Н. Константинов – 23.1.3
Л. Курляндчик – И7.4.6
С. Ландо – 28.3.2=28.4.1 (А.Шаповалов)
М. Макаров – 25.6.1, 25.7.4
М. Малкин – 27.1.5=27.2.3, 27.4.4, 27.6.4, 27.8.3
А. Марачев – 26.4.2
С. Маркелов – 19.4.2, 25.2.5, 25.3.6=25.4.3, 25.8.5, 26.3.5, 27.7.6, 28.3.6=28.4.5, 28.8.2
Л. Медников – 28.7.7=28.8.4 (А. Шаповалов)
С. Михайлов – 23.3.3
Д. Мусатов – 27.3.6
И.Нетай – И29.3.5 (В.Шевяков)
А. Николаев – 23.1.4 (фольклор), 23.2.3
Д. Пионтковский – 19.4.5 (С. Шалунов)
В. Произволов – 19.5.2, 20.1.3, 20.2.1, 20.4.3, 20.5.5, 20.7.4=20.8.4, 21.2.4, 21.5.1, 22.6.5, 23.3.2, 23.5.3=23.6.1, 24.3.3
Е. Поршнев – 24.6.5[6]
В. Протасов – 24.4.5
Л. Радзивиловский – 28.2.5 (А. Гладких)
И. Рубанов – Д19.5.4, 19.7.5
И. Рыбников – 22.5.3, 22.6.1
Р. Садыков – 20.7.6=20.8.6 (А. Шаповалов)
А. Самосват – И6.8.4 (Н. Васильев)
В. Сендеров – 19.4.1, 19.5.3, 20.6.1, 21.1.2, 21.2.2, 22.3.3=22.4.1, 23.1.2, 23.7.1, 23.8.7 (А. Спивак)
П. Сергеев –28.4.2 (Р. Гордин)
М. Скопенков – 22.4.4, 24.8.7, 25.7.1, 28.6.5а<28.5.5 (И. Богданов), 28.6.5б
М. Смуров – 19.7.2
М. Сонкин – 21.5.2
С. Слободник – 25.8.3, 28.4.4
А. Спивак – 22.2.2, 23.8.2 (А. Хачатурян), 23.8.7 (В. Сендеров)
Таирова – 20.5.1
С. Токарев – 19.5.4≈19.6.2[7], 21.7.6<21.8.6, 21.8.5, 24.8.6, 26.4.1, 26.5.3, 27.4.5, 27.7.2(жюри)<27.8.5, 27.7.7 (А. Эвнин), 28.7.2 (С. Дориченко, Р. Женодаров)
А. Толпыго – 20.7.1, 21.6.4, 22.8.5, 25.1.2, 25.3.7=25.4.5, 25.6.3, 26.1.5=26.2.4, 26.6.5, 26.8.4, 27.2.1, 27.5.3, 27.6.3, 27.8.6, 28.4.7, 28.8.6, И7.1.7
В. Трушков – 22.6.4
А. Федотов – 19.6.1
В. Филимонов – 27.2.4 (И. Богданов, Ю. Кудряшов)

---

[5] Задача 20.5.3 является переформулировкой теоремы А. Лебега.
[6] Известный факт из доказательства теоремы Бояйи-Гервина.
[7] Задачи Г.Гальперина 19.5.4 и 19.6.2 являются переоткрытием задачи С. Токарева 1995 г. (см. [Сав], задача 167).

фольклор – 21.7.3[8], 23.1.4, 24.6.2, 24.6.5, 25.1.3=25.2.1[9], 25.3.5, 25.5.5=25.6.5, 25.7.2, И4.2.5
С. Фомин – И7.2.3
Б. Френкин – 19.7.4, 24.8.2, 25.3.3, 25.7.3=25.8.1, 26.1.3, 26.2.3, 26.3.4=26.4.3, 26.7.7, 27.7.1, 27.8.1, 28.2.4, 28.5.4, 28.7.5, И29.3.4
А. Хачатурян – 23.8.2 (А. Спивак), 24.7.4, 28.7.1
А. Чеботарев – 24.5.1=24.6.1, 24.8.5
Е. Черепанов – 21.3.2, 23.4.7
А. Чернятьев – 20.2.4
С. Шалунов – 19.4.5 (Д. Пионтковский)
А. Шаповалов – 19.3.3, 19.3.5, 19.5.1, 19.5.5, 19.6.3, 19.7.6, 19.8.3, 19.8.5, 20.1.4, 20.3.1<20.4.1, 20.3.2, 20.3.4, 20.3.6, 20.4.4, 20.7.6=20.8.6 (Р. Садыков), 20.8.1, 21.1.1, 21.1.5, 21.2.1, 21.2.5, 21.3.1, 21.3.3<21.4.5, 21.3.4, 21.3.5=21.4.3[10], 21.3.6, 21.4.1, 21.4.2, 21.4.5, 21.4.6 (М. Шаповалов), 21.5.3, 21.5.4, 21.6.2, 21.7.2, 21.7.4, 21.8.3, 23.1.5, 22.1.3, 22.1.4<22.2.4, 22.2.3, 22.4.2, 22.4.5, 22.5.2, 22.5.4, 22.7.5, 23.2.5, 23.3.1, 23.3.5, 23.3.6, 23.4.2, 23.4.3, 23.4.5, 23.5.5, 23.6.3, 23.6.4, 23.7.6, 23.7.7, 23.8.3, 23.8.4, 23.8.6, 24.1.5, 24.2.5, 24.3.2=24.4.1, 24.3.7≈24.4.7, 24.5.2, 24.5.4, 24.6.3, 24.6.4, 24.7.3а[11], 25.1.5, 25.2.3, 25.5.3, 25.8.6, 26.1.1, 26.2.5, 26.3.1, 26.3.6, 26.3.7=26.4.5, 26.4.6, 26.6.1, 26.7.6=26.8.3, 27.3.3=27.4.3, 27.4.1, 27.8.7, 28.1.5, 28.2.3, 28.3.2=28.4.1 (С.Ландо), 28.3.5, 28.3.7, 28.4.3, 28.4.6, 28.7.4, 28.7.7=28.8.4 (Л. Медников)
М. Шаповалов –21.4.6 (А. Шаповалов), 24.1.4
И. Шарыгин – 19.6.5, 19.8.4, 22.7.3 (А. Заславский), 24.8.4
В. Шевяков – И29.3.5 (И. Нетай)
А. Шень – 20.4.5, 24.1.3=24.2.2
С. Шестаков – 23.7.3
А. Эвнин – 25.3.2=25.4.1, 27.7.7 (С. Токарев)
Lagarias J., Rains E., Sloane N. – 24.4.6

Литература

[Бак] И.Я.Бакельман. Инверсия. М., Наука, 1966.

[Вып] И.М.Яглом, В.Г.Болтянский. Выпуклые фигуры. Гос. изд-во технико-теоретической литературы. Москва-Ленинград. 1951

[Заоч] Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер, Ж.М.Раббот, А.Л.Тоом «Заочные математические олимпиады», М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987

[ЗР] М.А. Екимова, Г.П. Кукин «Задачи на разрезание», М., МЦНМО, 2002

[Мит] И.М.Мительман «Раскрасим клетчатую доску», Ижевск: Издат. Дом «Удм. ун-т», 2002

[Кокс] Грейтцер С.Л., Коксетер Г.С.М. « Новые встречи с геометрией», М.: Наука, 1978

[МЗ] «Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду» под ред. А.А.Заславского, Д.А.Пермякова, А.Б.Скопенкова, М.Б.Скопенков и А.В.Шаповалова. – М., МЦНМО, 2009

---

8 Задача есть, в частности, в книге [ПиК].

9 Из Венгрии.

10 Задача 21.3.5 является переоткрытием задачи С. Генкина 1991 г. (см. [СПМО], 1991, задача 24).

11 Впервые – на турнире им. А.П. Савина в 1996 г. (см. [Сав]).

[ММО] Р.М. Федоров, А.Я. Канель-Белов, А.К. Ковальджи, И.В. Ященко «Московские математические олимпиады: 1993 – 2005 г.», М., МЦНМО, 2006

[ММО70] «LXX Московская математическая олимпиада. Задачи и решения», М., МЦНМО, 2007

[ММО74] «LXXIV Московская математическая олимпиада. Задачи и решения», М., МЦНМО, 2011

[ПМО] С. Берлов, С. Иванов, К. Кохась «Петербургские математические олимпиады», Санкт-Петербург, Лань, 1998

[ПиК] Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер «Прямые и кривые», Москва, МЦНМО, 2002 (посл. изд.)

[Прас] В.В.Прасолов «Задачи по планиметрии», Москва, Наука, 1991

[Сав] «Математические турниры имени А.П. Савина», сост. А.В. Спивак, С.И. Токарев, Бюро Квантум, Москва, 2003

[СПМО] Д.В.Фомин «Санкт-Петербургские математические олимпиады», СПб, Политехника, 1994

[ТГИзр1] «18-й Международный Математический Турнир Городов, 1997-98 учебный год. Задачи и решения», Хайфа, 1997

[ТГИзр2] «19-й Международный Математический Турнир Городов, , 1998-99 учебный год. Задачи и решения », Хайфа, 1998

[Толп] А.К. Толпыго «Тысяча задач Международного математического турнира городов» М.: МЦНМО, 2009.

[Узк] А.В.Шаповалов «Принцип узких мест», М., МЦНМО, 2008.

[УП] В.О. Бугаенко. Уравнения Пелля. М.: МЦНМО, 2001.

[УрЦЧ] А.О. Гельфонд «Решение уравнений в целых числах», Москва. Наука, 1978

http://www.ashap.info/Knigi/index.html