Инвариант

А.В.Шаповалов

Параграф из 2-го издания книги «Математика в задачах»

Слово «инвариант» означает «неизменный». Чаще всего под этим понимают *величину*, значение которой не меняется при некоторых преобразованиях или в некотором процессе. Например, при разрезании фигур на части и складывании новых фигур не меняется суммарная площадь частей. Из этого следует, в частности, что нельзя разрезать квадрат со стороной 1 на части и сложить из них равносторонний треугольник со стороной 1,5. Действительно, общая площадь частей равна 1, а площадь треугольника – больше.
Итак, в типовых задачах «на инвариант» доказывают невозможность конструкций. Для этого находят инвариант всех конструкций, которые *можно* построить и проверяют, что у искомой конструкции значение инварианта отличается.
Но как найти инвариант? Начните с проверки типовых величин: сумм, произведений, площадей, периметров и их комбинаций. Если конструкция зависит от целых чисел, то инвариантом может быть остаток по какому-то модулю, чаще всего – *четность.*

Задача 1. Докажите, что клетчатый квадрат 99×99 нельзя по границам клеток разрезать на прямоугольники (возможно, не одинаковые), чей периметр не делится на 4.

Задача 2. Дан жесткий проволочный контур квадрата площади 1 дм^2. Его разрезали на 3 части и спаяли заново. Получился контур плоского многоугольника. Какова наибольшая возможная площадь этого многоугольника?

Ещё чаще встречаются задачи, где надо доказать, что в заданном *процессе* некоторый результат недостижим. Обычно процесс состоит в пошаговом переходе от позиции к позиции. Если при этом некоторая связанная с позицией величина не меняется, то она называется *инвариантом.* Инвариантность достаточно проверить для каждого отдельного шага.
Соответственно, позиции с другими значениями инварианта будут недостижимы.

Задача 3. Разрешается заменять набор чисел (a, b, c) на набор (a+b–c, a+c–b, b+c–a). Можно ли из набора (2013, 2014, 2015) получить набор (2015, 2016, 2017), возможно, в другом порядке?

Задача 4. На столе лежит куча из 200 орехов. За один ход из нее съедают один орех и кучу делят на две (не обязательно поровну). Затем из какой-нибудь кучи, где больше одного ореха, снова съедают один орех и снова кучу делят на две. И так далее. Можно ли через через несколько ходов оставить на столе только кучи из 5 орехов?

При поиске инварианта вышеуказанные величины можно подсчитывать не для всей конструкции, а для выделенного подмножества или нескольких подмножеств. Практическим способом выделения подмножеств служит *раскраска*: скажем, красят выделенное подмножество или раскрашивают все элементы в несколько цветов, подсчеты производят для каждого цвета отдельно, а потом результаты комбинируют.

Задача 5. Петя записывает в строку числа 0, 1, 2, …, 10 в каком хочет порядке. Затем каждым ходом он увеличивает два рядом стоящих числа на 1. Может ли Петя за несколько ходов добиться, чтобы все числа стали равными?

Задача 6. Из шахматной доски вырезали центральный квадрат 2×2. Можно ли оставшуюся часть разрезать на 4-клеточные фигурки Г?

Инвариант может быть и не числом, а просто каким-то неизменным свойством. В простых олимпиадных задачах инварианты чаще всего связаны с чередованием или с невозможностью уничтожить элемент с каким-то свойством. Таким свойством может быть совпадение, в частности, *синхронное чередование* двух «маячков».

Задача 7. Маляр-хамелеон ходит по клетчатой доске как хромая ладья, то есть в соседнюю по стороне клетку. Попав в очередную клетку, он либо сам перекрашивается в её цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра-хамелеона ставят на чёрную доску размером 8×8 клеток. Сможет ли маляр раскрасить её в шахматном порядке?

Задача 8. На клетке шахматной доски стоял кубик, его грань в точности совпадала с клеткой. Кубик прокатили по доске, переворачивая каждый раз через ребро. В конце он встал той же гранью на ту же клетку. Может ли кубик оказаться повернутым на 90° вокруг вертикальной оси?

Получается, что с помощью инварианта можно доказывать только невозможность чего-то? Да нет, не только. Чтобы доказать какое-то свойство, можно, например, предположить противное, а потом с помощью инварианта, свести предположение к противоречию.

Задача 9. Картонный треугольник катают по плоскости, перекатывая через сторону. После 2015 перекатываний он попал в точности на исходное место. Докажите, что треугольник равнобедренный.

В более сложных математических задачах инвариантом могут быть такие важные в математике объекты и свойства как рациональность и иррациональность, конечность и бесконечность. Только что мы использовали понятие *ориентации* (это когда различают порядок обхода по часовой или против часовой стрелки). В высшей математике распространены инварианты-многочлены. Вот и в следующей задаче в качестве инварианта удобнее взять не число, а *выражение*.

Задача 10. На прямой отмечены две точки: слева – синяя, справа – красная. За одну операцию можно добавить или стереть две отмеченные точки одинакового цвета, если между ними нет других отмеченных точек. Можно ли такими операциями добиться, чтобы на прямой остались только две отмеченные точки, но синяя – справа?

С помощью инварианта часто доказывают, что конечный результат действий не зависит от их порядка. Для этого достаточно ввести величину, инвариантную относительно выбора порядка или неизменную для промежуточных позиций и показать, что конечный результат этой величиной однозначно определяется.

Задача 11. На огороженном поле 1 км ×1 км были построены заборы, разделившие его на прямоугольные участки 5м×20м и 6м×12м. Какова общая длина построенных заборов?

Задача 12. На доске написаны 100 чисел: 1, ½, 1/3, …, 1/99. Каждым ходом Петя стирает любые два числа и записывает вместо них отношение их произведения к их сумме. Докажите, что последнее число на доске не зависит от порядка стирания и найдите это число.

Знание, какие позиции или конструкции достижимы, а какие – нет, помогает решать задачи на оценку+пример: ведь оценку для более узкого круга позиций доказывать проще, а часто и пример с заданными свойствами строить легче.

Задача 13. По кругу расположены 30 монет, чередуясь: три подряд орлом, три решкой, три орлом, три решкой и т.д. Если у монеты два соседа лежат по-разному, ее можно перевернуть. Какое наибольшее число монет можно положить орлом с помощью таких операций?

Задача 14. В Зазеркалье имеют хождение монеты достоинством 7, 13 и 25 гиней. Алиса заплатила за пирожок несколько монет, и получила на сдачу на две монеты больше. Какова минимально возможная стоимость покупки?

А можно ли с помощью инварианта доказать, что преобразование возможно? Тут все не так просто. Совпадение значений инварианта такой возможности ещё не гарантирует: для невозможности может найтись какая-то другая причина, например, другой инвариант, с несовпадающими значениями...

Задача 15. Можно ли бумажный круг разрезать на несколько частей по прямым линиям и дугам окружностей и составить из них квадрат той же площади?

В тех случаях, когда совпадение значений инварианта гарантирует преобразование, это надо доказывать отдельно. Кстати, в этом случае инвариант называют *полным инвариантом*. Так, например, инварианты, указанные в решениях задачи 7 и 13, является полным: любую позицию с доминошкой или тем же числом спичек получить можно. Теорема Бояйи-Гервина утверждает, что при *перекройке* плоских фигур (т.е. разрезании на многоугольные части и складывании из всех частей) полным инвариантом является площадь фигуры. А *полной системой инвариантов* называется такой набор инвариантов, что совпадение значений *всех* инвариантов набора гарантирует возможность построения (преобразования). Например, для перекройки многогранников, кроме совпадения объемов требуется ещё и совпадение *инварианта Дена*. Следующую задачу не решить без построения полной системы.

Задача 16. Пусть F_1, F_2, F_3, ... – последовательность выпуклых четырехугольников, где F_{k+1} (при $k = 1, 2, 3, ...$) получается так: F_k разрезают по диагонали, одну из частей переворачивают и склеивают по линии разреза с другой частью. Какое наибольшее количество различных четырехугольников может содержать эта последовательность? (Различными считаются многоугольники, которые нельзя совместить движением.)

Решения задач — см. книгу.