IV олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. Решения. 8 класс. Первый день

1. (Б.Френкин) Существует ли выпуклый четырехугольник без параллельных сторон, который можно разрезать на четыре равных треугольника?

   Ответ. Да. См., например, рис.8.1.

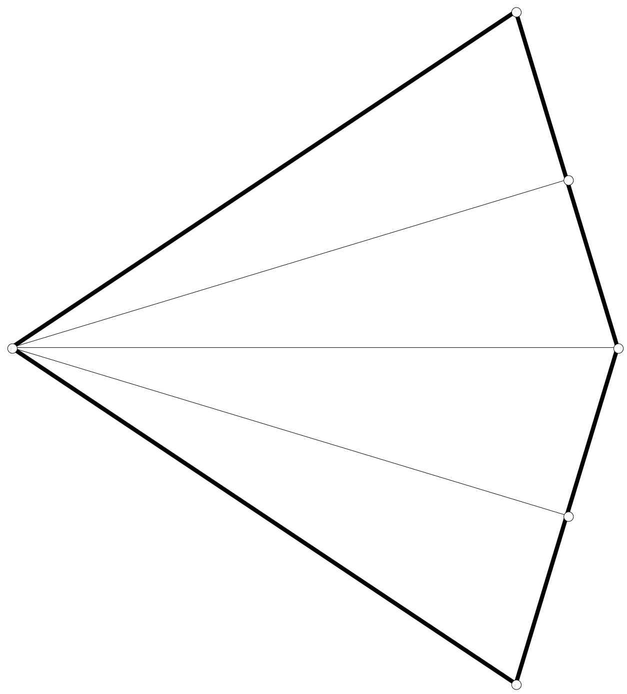

Рис.8.1.

2. (Ф.Нилов) Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC и углом $A = 50^\circ$. Точки K и L на катете BC таковы, что $\angle KAC = \angle LAB = 10^\circ$. Найдите CK/LB.

   Ответ. 2.

   Решение. Пусть L' — точка, симметричная L относительно AB (рис.8.2). Так как $\angle L'KA = 50^\circ = \angle KAL'$, $L'K = L'A = LA$. С другой стороны, $\angle CAL = 40^\circ = \angle ACL$, т.е $AL = CL$. Из этих равенств следует, что $CK = LL' = 2LB$.

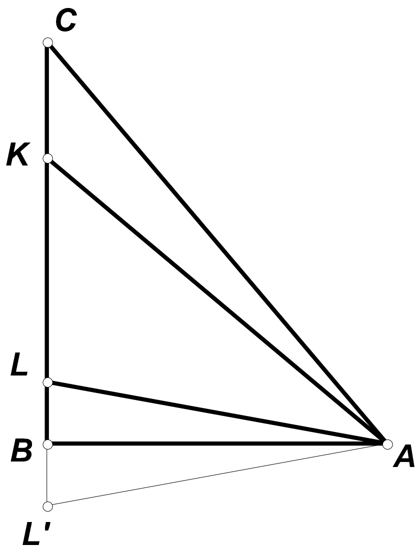

Рис.8.2.

3. (Д.Шноль) В выпуклом четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями равны два противолежащих угла. Докажите, что в него можно вписать окружность.

Решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle D$, O — точка пересечения диагоналей. Предположим, что $OB > OD$. Тогда точка D', симметричная D относительно AC, лежит на отрезке OB (рис.8.3). Следовательно, по свойству внешнего угла треугольника $\angle AD'O > \angle ABO$, $\angle CD'O > \angle CBO$. Но тогда $\angle D = \angle AD'C > \angle B$ — противоречие. Таким образом, $OB = OD$, т.е диагональ AC является осью симметрии четырехугольника. Значит, биссектрисы углов B и D пересекают AC в одной и той же точке, которая равноудалена от всех сторон четырехугольника.

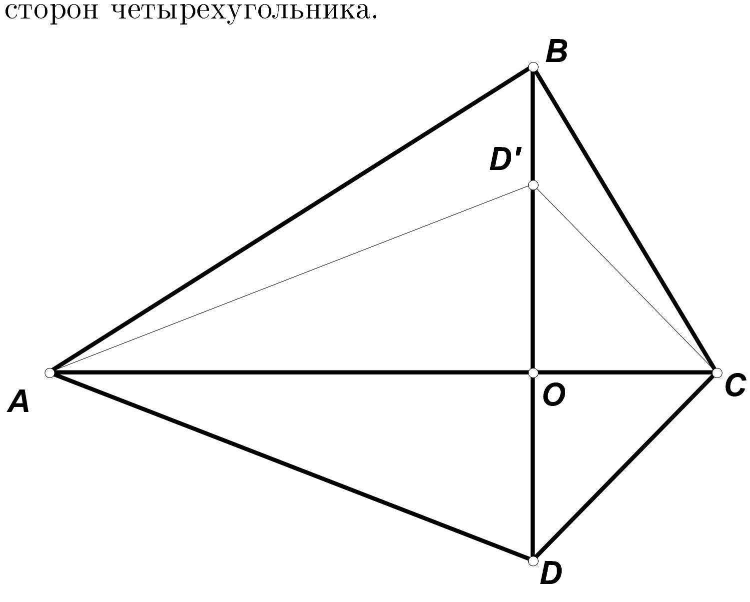

Рис.8.3.

4. (Ф.Нилов, А.Заславский) Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A', B', прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1. Докажите, что $\angle C_1CA = \angle C_0CB$.

   Решение. Так как треугольники CAA', CBB' — равнобедренные, $\angle CAA' = \angle C_0CA$, $\angle CBB' = \angle C_0CB$. Следовательно, расстояния от точки C до прямых AC_1 и BC_1 равны соответственно расстояниям от A и B до прямой CC_0. Но CC_0 — медиана, так что эти расстояния равны. Таким образом, точка C равноудалена от прямых C_1A и C_1B, т.е. $\angle CC_1A = \angle CC_1B$. Отсюда получаем, что $\angle C_1CA - \angle C_1CB = \angle C_1BC - \angle C_1AC = \angle C_0CB - \angle C_0CA$ (рис.8.4). Это, очевидно, равносильно утверждению задачи.

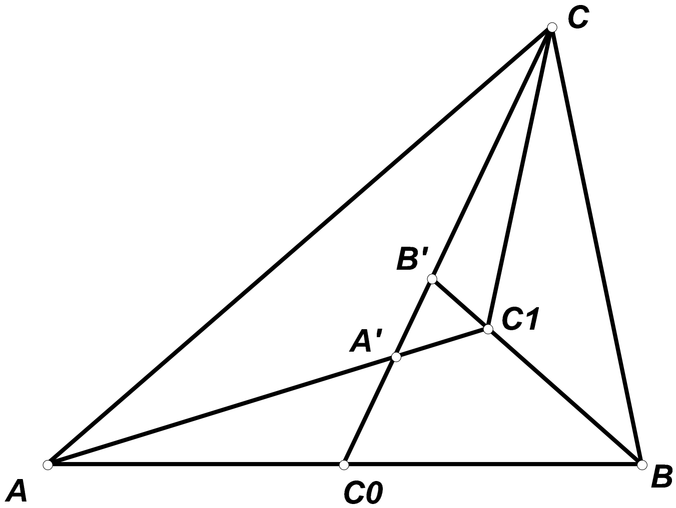

Рис.8.4.

5. (А.Заславский) Даны два треугольника ABC, $A'B'C'$. Обозначим через α угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины A. Аналогично определим углы β, γ, α', β', γ'. Известно, что $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Обязательно ли треугольники подобны?

   Ответ. Нет.

   Решение. Пусть стороны треугольника $A'B'C'$ параллельны медианам треугольника ABC. Тогда стороны ABC параллельны медианам $A'B'C'$ и, значит, углы между медианами и высотами в обоих треугольниках одни и те же. При этом в общем случае треугольники не подобны.

IV олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. 8 класс. Второй день

6. (Б.Френкин) Рассматриваются треугольники, все вершины которых являются вершинами данного правильного 2008-угольника. Каких среди них больше: остроугольных или тупоугольных?

Ответ. Тупоугольных.

Решение. Зафиксируем две вершины A и B треугольника. Если они являются противоположными вершинами 2008-угольника, то при любой третьей вершине C треугольник ABC — прямоугольный. В противном случае пусть A', B' — вершины 2008-угольника, противоположные A, B. Треугольник ABC будет остроугольным тогда и только тогда, когда C находится на меньшей из двух ограниченных точками A', B' дуг описанной около 2008-угольника окружности. Следовательно, при любых фиксированных A, B среди треугольников, имеющих эти две вершины, остроугольных не больше, чем тупоугольных, а для некоторых пар вершин строго меньше. Значит, и всего тупоугольных треугольников больше.

7. (Ф.Нилов) Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и углом α при вершине. На отрезке AC во внешнюю сторону построена дуга с градусной мерой β. Две прямые, проходящие через вершину B, делят как отрезок, так и дугу AC на три равные части. Найдите α/β.

Ответ. 1/3.

Решение. Пусть X, Y — точки, делящие отрезок AC на три равные части ($AX = XY = YC$); U, V — точки пересечения прямых BX, BY с дугой AC; Z — точка пересечения прямых BC и UV (рис.8.7). Тогда, так как $UV \parallel AC$, то $VZ = UV = VC$. Следовательно, $\angle UCZ = 90°$. С другой стороны, по теореме о вписанном угле $\angle ACU = \angle UCV = \beta/6$, а $\angle BCA = 90° - \alpha/2$. Из этих равенств вытекает, что $\beta = 3\alpha$.

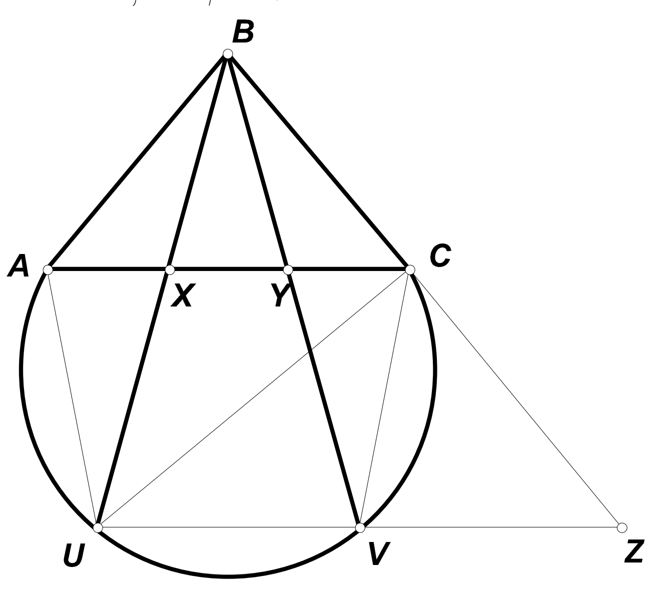

Рис.8.7.

8. (Б.Френкин, А.Заславский) На доске был нарисован выпуклый четырехугольник. Боря отметил центры четырех окружностей, каждая из которых касается одной стороны четырехугольника и продолжений двух соседних с ней. После чего Алёша стёр четырехугольник. Сможет ли Боря определить, чему равнялся периметр четырехугольника?

   Ответ. Да.

   Решение. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, образованный центрами окружностей, X — вершина исходного четырехугольника, лежащая на стороне AB. Так как его стороны являются биссектрисами внешних углов исходного четырехугольника, биллиардный шар, выпущенный из X вдоль стороны исходного четырехугольника, отражаясь от сторон $ABCD$, будет все время двигаться по сторонам. "Выпрямим"траекторию шара, построив четырехугольники: A_1BCD_1, симметричный $ABCD$ относительно BC, $A_2B_1CD_1$, симметричный A_1BCD_1 относительно CD_1, и $A_2B_2C_1D_1$, симметричный $A_2B_1CD_1$ относительно D_1A_2. Тогда траектория перейдет в отрезок XX', где X' — точка на A_2B_2, такая что $A_2X' = AX$ (рис.8.8). При этом $\angle X'XB = \angle XX'A_2$, т.е. $A_2B_2 \parallel AB$. Следовательно, взяв вместо X другую точку отрезка AB, соединив ее с соответствующей точкой отрезка A_2B_2 и произведя обратные отражения частей полученного отрезка, мы получим новый четырехугольник, удовлетворяющий условиям задачи. Таким образом, существует бесконечное множество четырехугольников, для которых A, B, C, D — центры вневписанных окружностей. Однако периметры всех этих четырехугольников равны длине отрезка $XX' = AA_2$, не зависящей от выбора точки X.

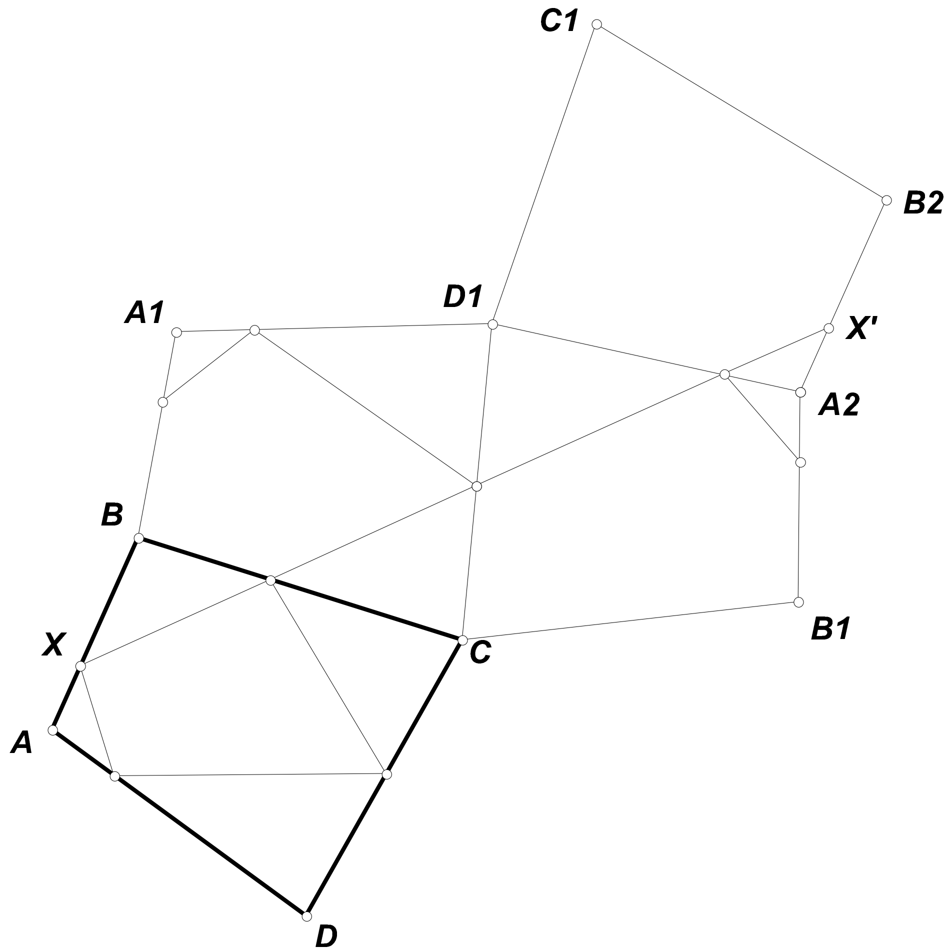

Рис.8.8.

IV олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 9 класс. Первый день

1. (А.Заславский) Выпуклый многоугольник можно разрезать на 2008 равных четырехугольников. Обязательно ли у него есть центр или ось симметрии?

   Ответ. Нет. Например, из трапеций, основания которых равны 1 и 2, а боковые стороны — 1 и $\sqrt{2}$, можно, продолжая конструкцию, изображенную на рис.9.1, составить несимметричный шестиугольник.

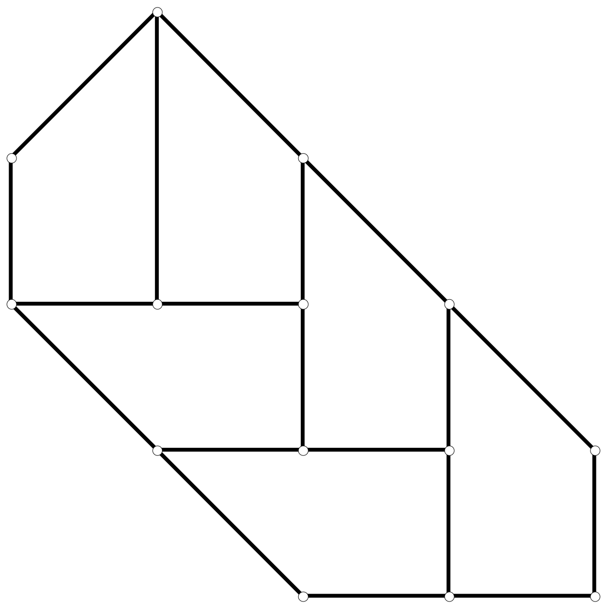

Рис.9.1.

2. (Ф.Нилов) Дан четырёхугольник $ABCD$. Найдите ГМТ, таких, что отрезки, соединяющие их проекции на прямые, содержащие противоположные стороны четырёхугольника перпендикулярны.

   Решение. Если четырехугольник — трапеция, то прямая, соединяющая проекции точки на боковые стороны, должна быть параллельна основаниям. Очевидно, что геометрическое место таких точек — прямая, проходящая через точку пересечения боковых сторон без самой этой точки. Также ясно, что для прямоугольника искомое ГМТ — вся плоскость, а для параллелограмма, отличного от прямоугольника, таких точек не существует.

   Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке X, BC и DA — в точке Y. Обозначим проекции произвольной точки P на прямые AB, BC, CD, DA через K, L, M, N, а точку пересечения KM и LN через O (рис.9.2). Так как четырехугольники $YLPN$ и $XKPM$ — вписанные, получаем, что $\angle PLN = \angle PYA$ и $\angle PMK = \angle PXA$. Следовательно, $\angle MOL = \pi - \angle C - \angle PLN - \angle PMK = \pi - \angle C - (\angle A - \angle XPY)$. Поэтому условие $\angle MOL = \pi/2$ равносильно условию $\angle XPY = \angle A + \angle C - \pi/2$. Значит, искомое ГМТ — окружность, проходящая через точки X и Y без самих этих точек.

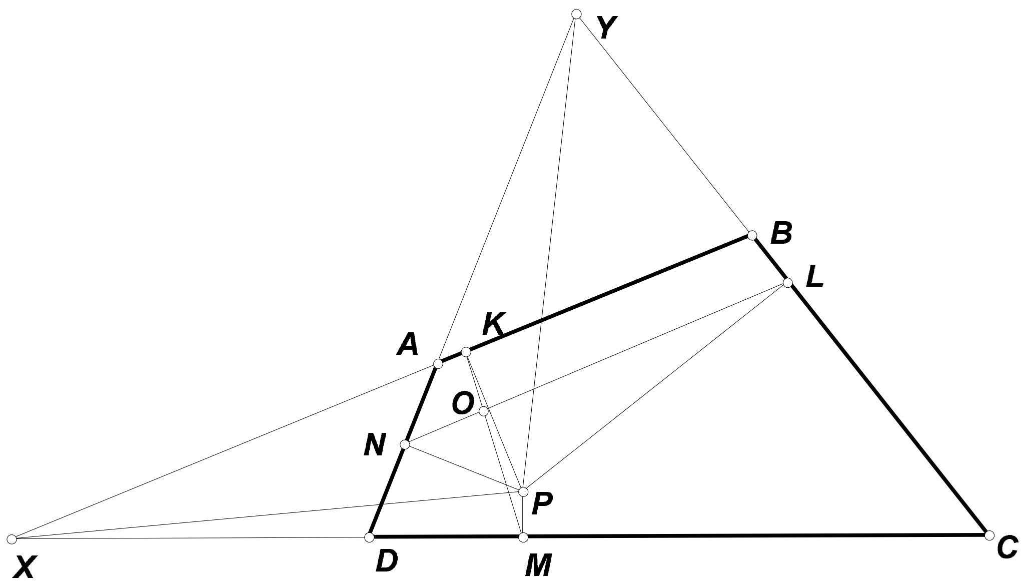

Рис.9.2.

3. (Р.Пиркулиев) Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\sin A}}+\frac{1}{\sqrt{2\sin B}}+\frac{1}{\sqrt{2\sin C}}\le\sqrt{\frac{p}{r}},$$

где p — полупериметр, а r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Решение. Пусть R и S — радиус описанной окружности и площадь треугольника ABC. Используя теорему синусов и формулы $S=pr=abc/4R$, преобразуем правую часть неравенства:

$$\begin{aligned}\sqrt{\tfrac{p}{r}} &= \tfrac{p}{\sqrt{S}}=\tfrac{R(\sin A+\sin B+\sin C)}{\sqrt{2R^2\sin A\sin B\sin C}}\\ &= \sqrt{\tfrac{\sin A}{2\sin B\sin C}}+\sqrt{\tfrac{\sin B}{2\sin C\sin A}}+\sqrt{\tfrac{\sin C}{2\sin A\sin B}}.\end{aligned}$$

Из неравенства о средних следует, что

$$\frac{2}{\sqrt{\sin A}}\le\sqrt{\frac{\sin B}{\sin C\sin A}}+\sqrt{\frac{\sin C}{\sin A\sin B}}.$$

Сложив это неравенство с двумя аналогичными, получим утверждение задачи.

4. (Ф.Нилов, А.Заславский) Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A_c, B_c, прямые AA_c и BB_c пересекаются в точке C_1. Аналогично определим точки A_1, B_1. Докажите, что окружность $A_1B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

Первое решение. Из решения задачи 8.4 следует, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке L, а точка C_1 лежит на окружности, проходящей через A, B и центр O описанной около ABC окружности. Поэтому $\angle OC_1L=\angle AC_1C-\angle AC_1O=\angle AC_1C-\angle ABO=(\pi-\angle C)-(\pi/2-\angle C)=\pi/2$, т.е.

C_1 лежит на окружности с диаметром OL. Аналогично получаем, что A_1 и B_1 тоже лежат на этой окружности.

Второе решение. Рассмотрим точку C_2, изогонально сопряженную C_1. Из условия слеует, что $\angle C_2AB = \angle C_2CA$ и $\angle C_2CB = \angle C_2BA$. Значит, окружности C_2AC и C_2BC касаются прямой AB в точках A и B. Пожтому радикальная ось этих окружностей — прямая CC_2 проходит через середину AB, т.е. C_2 лежит на медиане треугольника ABC. Соответственно C_1 лежит на симедиане, а прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке Лемуана L.

Как известно, симедиана CL проходит через точку C' пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, проведенных в точках A и B. Очевидно, что точки A, B лежат на окружности с диаметром OC'. Как показано в первом решении, C_1 лежит на этой же окружности. Следовательно, $\angle OC_1L = \pi/2$ и C_1 лежит на окружности с диаметром OL.

5. (Н.Авилов) Можно ли оклеить поверхность правильного тетраэдра одинаковыми правильными шестиугольниками?

Решение. Да, например, склеив тетраэдр из развертки, изображенной на рис.9.5, и разрезав его поверхность по жирным линиям, получим два равных правильных шестиугольника (темный и светлый).

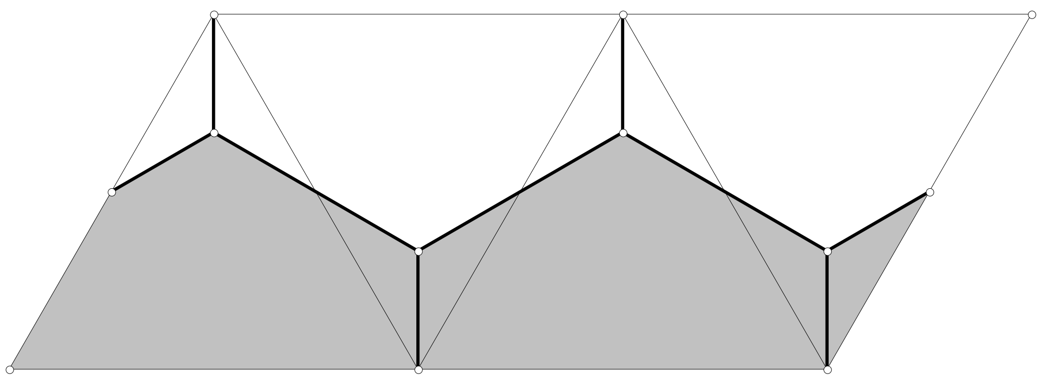

Рис.9.5.

IV олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 9 класс. Второй день

6. (Б.Френкин) Постройте треугольник, если даны его центр тяжести и основания высоты и биссектрисы, проведенных к одной стороне.

   Решение. Пусть C_1, C_2 — основания биссектрисы и высоты, проведенных из вершины C треугольника ABC, а M — его центр тяжести. Очевидно, вершина C лежит на перпендикуляре, восставленном из C_2 к прямой C_1C_2. Кроме того, проекция M на этот перпендикуляр делит высоту треугольника в отношении $2:1$, что позволяет сразу построить точку C и середину C_0 стороны AB.

   Пусть C' — точка пересечения прямой CC_1 и перпендикуляра l к прямой C_1C_2, проведенного из C_0. Точка C' лежит на описанной окружности треугольника ABC (рис.9.6), следовательно, серединный перпендикуляр к CC' пересекает l в центре O этой окружности. Построив окружность, мы найдем вершины A, B как точки ее пересечения с прямой C_1C_2.

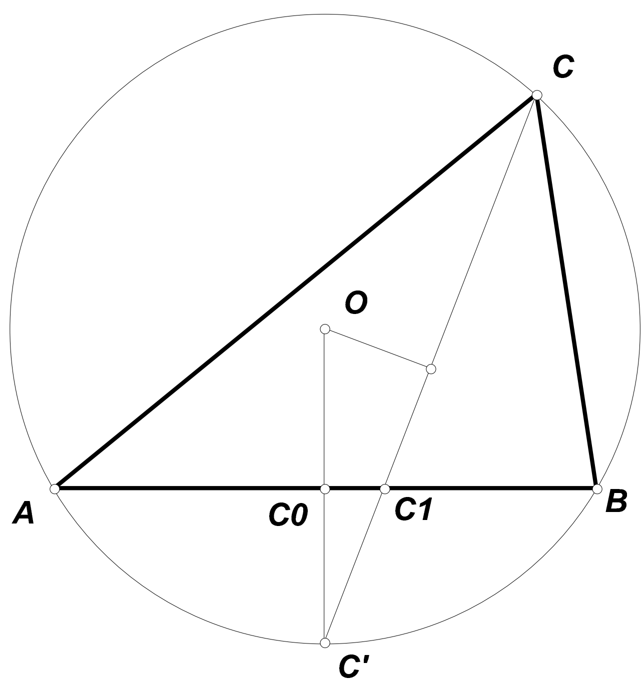

Рис.9.6.

7. (А.Заславский) Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R. Через ортоцентр H этого треугольника провели другую окружность того же радиуса, пересекающую описанную окружность в точках X, Y. Точка Z — четвертая вершина параллелограмма $CXZY$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, B, Z.

   Ответ. R.

   Первое решение. Докажем, что точка Z лежит на окружности ABH, радиус которой равен R. Пусть H' — вторая точка пересечения окружностей XYH и

ABH, C' — ортоцентр треугольника ABH' (рис.9.7). Тогда C' лежит на окружности, симметричной ABH относительно AB, т.е. на окружности ABC. Поэтому $CH = C'H' = 2R|\cos C|$ и $CHH'C'$ — параллелограмм. Так как CC' и HH' — хорды равных окружностей ABC и XHY, они симметричны относительно центра симметрии этих окружностей — середины XY. Следовательно, $XCYH'$ — параллелограмм, и H' совпадает с Z.

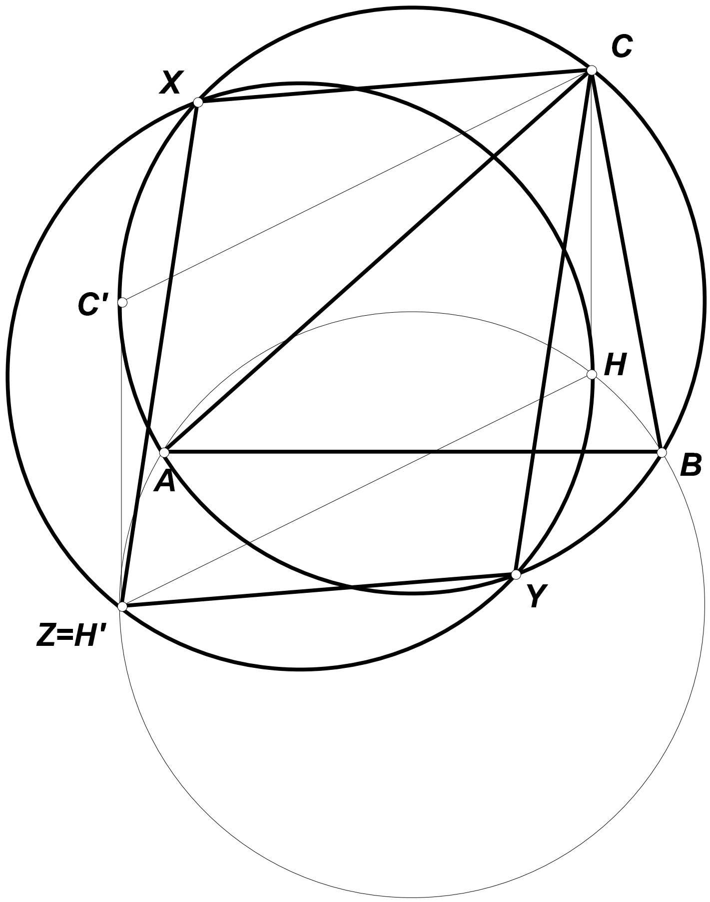

Рис.9.7.

Второе решение. Точка Z получается из C отражением относительно середины T отрезка XY. Пусть H' — отражение H относительно T. Тогда $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{H'Z}$. Заметим, что при сдвиге на $\overrightarrow{CH}$ окружность ABC переходит в окружность ABH (достаточно представить этот сдвиг как композицию симметрий относительно диаметра, параллельного AB, и относительно AB). Значит, точка H' при этом сдвиге переходит в точку Z, лежащую на окружности ABH, радиус которой равен R.

Третье решение. (А.Ефимов) Пусть O, O_1 — центры описанной окружности треугольника ABC и окружности, проходящей через H. Тогда O_1 лежит на окружности с центром H и радиусом R. Значит середина отрезка OO_1 лежит на окружности с центром в середине отрезка OH и радиусом $R/2$, т.е. окружности девяти точек треугольника ABC. Поскольку середины отрезков OO_1, XY и CZ совпадают, точка Z лежит на окружности — образе окружности девяти точек при гомотетии с центром C и коэффициентом 2, т.е. окружности радиуса R, проходящей через A и B.

8. (J.-L.Aime, France) На окружности ω, описанной около треугольника ABC, взяты две точки P и Q. Серединный перпендикуляр l к отрезку PQ пересекает прямые BC, CA, AB в точках A', B', C'. Пусть A", B", C" — вторые точки пересечения l с окружностями, описанными около треугольников $A'PQ$, $B'PQ$, $C'PQ$. Докажите, что прямые AA", BB", CC" пересекаются в одной точке.

   Решение. Пусть X, Y — точки пересечения ω и l. Рассмотрев центральную проекцию из ω на l с центром C, получаем равенство двойных отношений: $(AB;XY) = (B'A';XY)$. Далее, так как $\angle A'PA - \angle B'PB - \angle XPY = \pi/2$, получаем, что $(A'B';XY) = (A"B";YX)$. Следовательно $(AB;XY) = (A"B";YX)$, т.е. точка пересечения прямых AA" и BB" лежит на ω. Через эту же точку проходит и прямая CC".

IV олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. 10 класс. Первый день

1. (Б.Френкин) Вписанно-описанный n-угольник разрезан прямой линией на два вписанно-описанных многоугольника с разным количеством сторон. При каких n это возможно?

   Ответ. При $n = 3$.

   Решение. Предположим, что $n \neq 3$. Если $n > 4$, то граница хотя бы одного из полученных при разрезании многоугольников содержит отрезки, по крайней мере, трех сторон исходного многоугольника, и значит, вписанные в эти многоугольники окружности совпадают. Это утверждение остается верным и при $n = 4$, так как многоугольники, на которые разрезан исходный, имеют разное число сторон и, следовательно, разрезающая прямая не является диагональю четырехугольника.

   Таким образом, разрезающая прямая касается окружности, вписанной в исходный n-угольник, и отрезает от него треугольник. Вершинами оставшейся части являются $n-1$ вершина исходного многоугольника и две точки, лежащие на его сторонах. Поскольку $n-1 \geq 3$, эти вершины определяют единственную окружность, которая проходит через оставшуюся вершину многоугольника и, значит, не проходит через внутренние точки его сторон. Следовательно, оставшаяся часть не вписана в окружность — противоречие.

   Примечание. Очевидно, что для любого треугольника можно провести касательную к вписанной в него окружности, разрезающую его на треугольник и вписанный четырехугольник.

2. (А.Мякишев) Пусть $A_1B_1C_1$ — треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно центра окружности, вписанной в его серединный треугольник. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

   Решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, I — центр вписанной в него окружности, O — центр описанной, M — центр тяжести, I_0 — центр окружности, вписанной в серединный треугольник. Очевидно, что ортоцентр H_1 треугольника $A_1B_1C_1$ симметричен H относительно I_0. С другой стороны, для треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей, I является ортоцентром, ABC — ортотреугольником, а значит, описанная около ABC окружность — окружностью девяти точек. Следовательно, центр описанной окружности треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей, симметричен I относительно O. Рассмотрим треугольник IHH_1. Его медиана II_0 проходит через M и делится этой точкой в отношении $2:1$. Значит, M — центр тяжести этого треугольника. Но M также делит в отношении $2:1$ отрезок HO. Следовательно, O — середина отрезка IH_1 (рис.10.2)

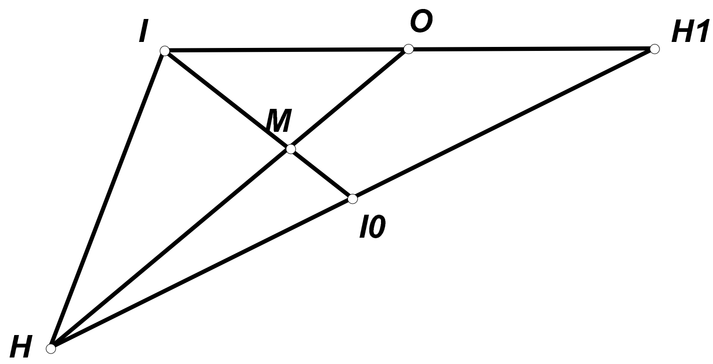

Рис.10.2.

3. (В.Ясинский, Украина) Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в двух точках X и Y, а третья окружность ω касается внутренним образом окружностей ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. Отрезок XY пересекает окружность ω в двух точках M и N. Лучи PM и PN пересекают ω_1 в точках A и D, а лучи QM и QN пересекают ω_2 в точках B и C соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

   Решение. Точка P является центром гомотетии окружностей ω и ω_1. Следовательно, $AD \parallel MN$, т.е. отрезок AD перпендикулярен линии центров окружностей ω_1 и ω_2, а точки A и D симметричны относительно этой линии. Аналогично B и C симметричны относительно этой линии, и значит, $AB = CD$ (рис.10.3).

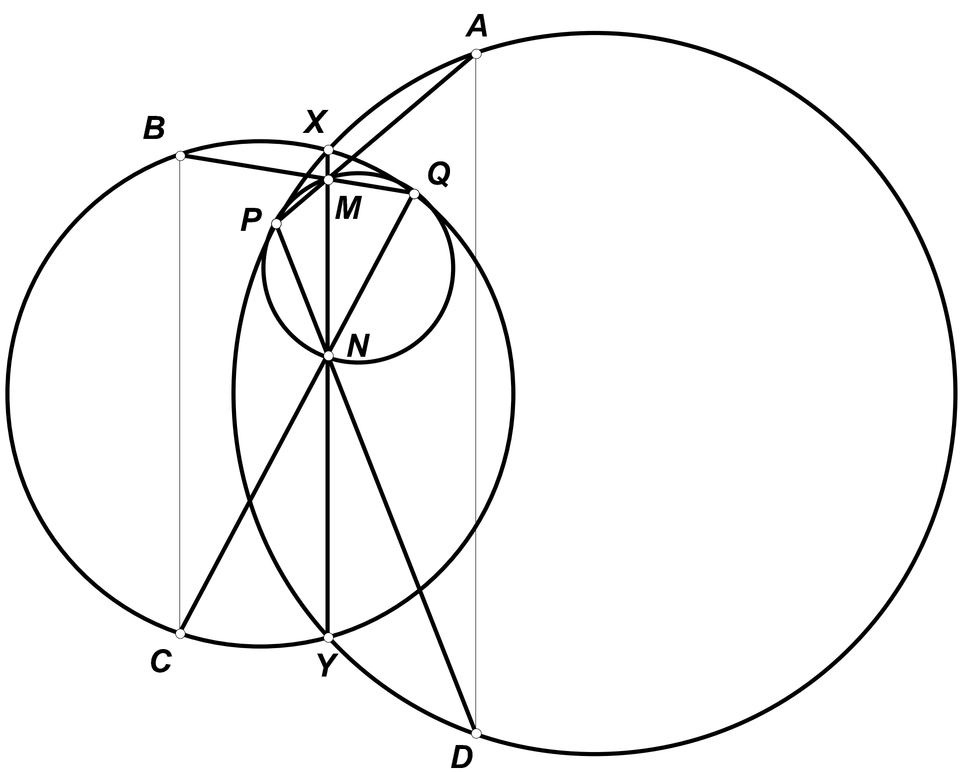

Рис.10.3.

4. (А.Заславский) На прямой l даны три точки C_0, C_1, C_2. Найдите геометрическое место центров окружностей, вписанных в треугольники ABC, у которых

сторона AB лежит на прямой l, а основания медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из вершины C, совпадают с C_0, C_1, C_2.

Ответ. Прямая, перпендикулярная l и проходящая через точку C' на отрезке C_0C_2, такую что $C_0C'^2 = C_0C_1 \cdot C_0C_2$.

Решение. Пусть C_3, C_4 — точки касания стороны AB с вписанной и вневписанной окружностями треугольника. Тогда C_0 — середина отрезка C_3C_4. С другой стороны, точки C_3, C_4 являются проекциями на прямую AB центров I, I_c вписанной и вневписанной окружности (рис.10.4). Так как эти центры лежат на прямой CC_1, выполняются равенства:

$$\frac{C_2C_3}{C_2C_4} = \frac{CI}{CI_c} = \frac{r}{r_c} = \frac{C_1I}{C_1I_c} = \frac{C_1C_3}{C_1C_4}.$$

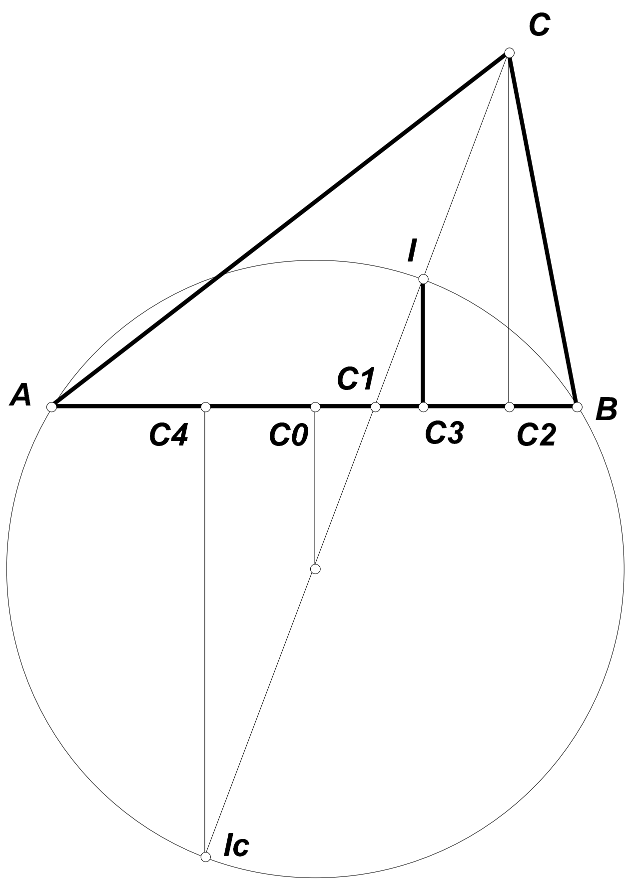

Рис.10.4.

Из этих равенств следует, что точка C_3 совпадает с определенной выше точкой C'. Возьмем теперь любую точку I, проекция которой на l совпадает с C_3. Прямая C_1I пересекает перпендикуляры к l, восставленные из C_2 и C_0, в точке C и центре описанной окружности треугольника IAB. Проведя эту окружность и найдя точки ее пересечения с l, мы получим искомый треугольник.

5. (И.Богданов) Сечение правильной четырехугольной пирамиды является правильным пятиугольником. Найдите отношение его стороны к стороне основания пирамиды.

Ответ. $\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Решение. Пусть X, Y — точки, в которых плоскость сечения пересекает стороны CD и DA основания $ABCD$ пирамиды. Тогда пятиугольник $ABCXY$ является центральной проекцией правильного пятиугольника. Следовательно, двойное отношение A, Y, D и бесконечно удаленной точки прямой AD равно двойному отношению четырех точек, в которых четыре прямые, содержащие стороны правильного пятиугольника, пересекают пятую (рис.10.5), т.е.:

$$\frac{DY}{AD} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

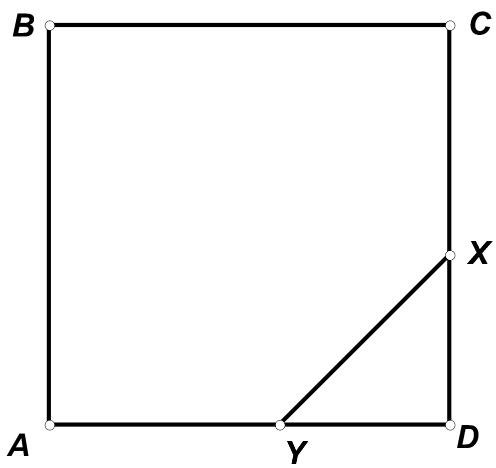

Рис.10.5.

Точка X делит отрезок CD в таком же отношении, следовательно, искомое отношение равно

$$\frac{XY}{AB} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Примечание. Так как отношение стороны пятиугольника к стороне основания определяется однозначно, отношение стороны основания к боковой стороне пирамиды также определяется однозначно. С другой стороны, известно, что плоскости 8 граней правильного икосаэдра ограничивают правильный октаэдр. Поэтому пирамида, удовлетворяющая условиям задачи, является половиной октаэдра, т.е. ее боковое ребро равно стороне основания.

IV олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 10 класс. Второй день

6. (Б.Френкин) В треугольнике произведение двух сторон равно $8Rr$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей. Докажите, что угол между ними меньше 60°.

   Решение. Пусть произведение сторон $AC = b$ и $BC = a$ треугольника ABC равно $8Rr$. Так как площадь треугольника $S = pr = abc/4R$, где p — полупериметр, получаем, что $4prR = abc = 8Rrc$, т.е $p = 2c$ или $a + b = 3c$. Поскольку $b < a+c$, отсюда следует, что $2a > 2c$ и $c < a$. Аналогично $c < b$. Таким образом, C как строго наименьший угол треугольника меньше 60°.

7. (Ф.Нилов) На медианах AA' и BB' треугольника ABC построены в сторону вершины C дуги с одинаковой градусной мерой. Докажите, что общая хорда окружностей, содержащих эти дуги, проходит через C.

   Решение. Пусть окружность, построенная на AA', пересекает AC в точке X, а окружность, построенная на BB' пересекает BC в точке Y (рис.10.7). Так как $\angle AXA' = \angle BYB'$, треугольники CXA' и CYB' подобны, т.е. $CX/CA' = CY/CB'$. Тогда

$$CX \cdot CA = 2CX \cdot CB' = 2CY \cdot CA' = CY \cdot CB.$$

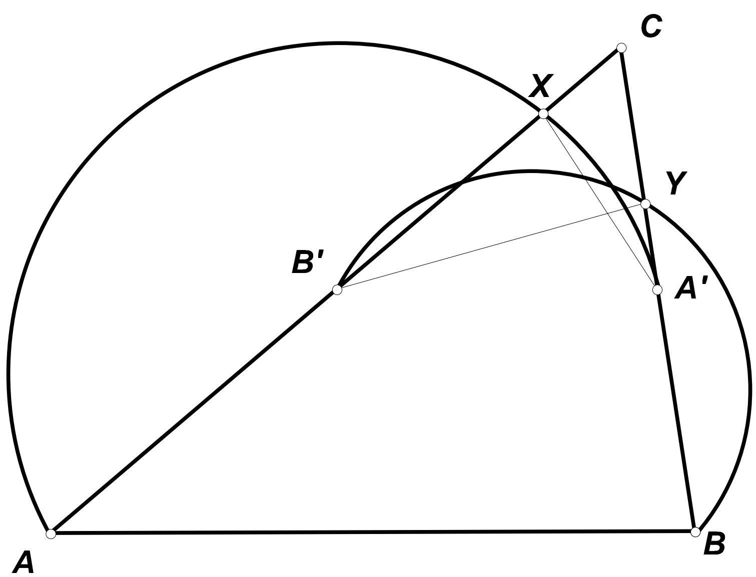

Рис.10.7.

   Следовательно, степени точки C относительно обеих окружностей равны, т.е. C лежит на их радикальной оси.

8. (А.Акопян, В.Дольников) Множество точек на плоскости таково, что из любых трех его точек найдутся две, расстояние между которыми не превосходит 1. Докажите, что это множество можно разбить на три части, диаметр каждой из которых не превоходит 1.

Решение. Назовем 1-близкими точки, расстояние между которыми не превосходит 1.

Если диаметр данного множества V не превосходит $\sqrt{3}$, то V можно покрыть кругом радиуса 1. Этот круг можно выбрать так, что на его границе будут лежат точки из V. Обозначим центр этого круга через X, а точку на границе через Y.

Заметим, что точки множества $V \setminus B(Y, 1)$ попарно 1-близки, а значит, диаметр этого множества не превосходит 1. Кроме того, отрезок $[X, Y]$ разбивает множество $V \bigcap B(Y, 1)$ на две части, диаметр каждой из которых не превосходит 1. Так мы получаем нужное нам разбиение.

Если же найдутся такие две точки $X, Y \in V$, что $d(X, Y) > \sqrt{3}d$, тогда легко понять, что множества $V \setminus B(X, 1)$, $V \setminus B(Y, 1)$ и $V \bigcap B(X, 1) \bigcap B(Y, 1)$ в объединении дают всё V, и диаметр каждой из этих частей не превосходит 1. Действительно, точки каждого из множеств $V \setminus B(X, 1)$ и $V \setminus B(Y, 1)$ попарно 1-близки. А множество $V \bigcap B(X, 1) \bigcap B(Y, 1)$ целиком лежит внутри $B(X, 1) \bigcap B(Y, 1)$, диаметр которого не больше 1 (и достигается на отрезке, соединяющим точки пересечения окружностей $S(X, 1)$ и $S(Y, 1)$).